

## § 5.6 电磁波的干涉和衍射

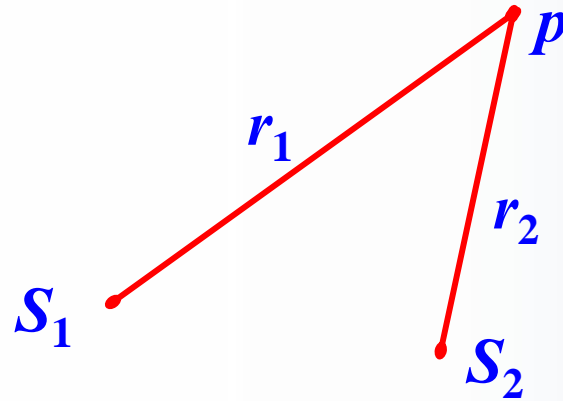
### Interference and Diffraction Phenomenon of Electromagnetic Wave

本节所要研讨的是如下两个问题：**第一**、由 **Maxwell's equations** 的线性条件知道，电磁场服从叠加原理，这就是说，当空间有两列以上电磁波同时存在时，空间各点的总场强等于这些电磁波的场强矢量和。讨论叠加现象属于电磁波的**干涉(Interference)**问题；**第二**、电磁波在传播过程中，会绕过障碍物而继续传播，这种现象属于电磁波的**衍射(diffraction)**问题。

## 1、电磁波的干涉现象

### (Interference phenomenon of electromagnetic wave)

设空间有两列电磁波，它们具有相同的振幅和相同的频率，分另由 $S_1$ 、 $S_2$ 、两点同时发出，则在 $t$ 时刻它们在 $p$ 点的电场强度分别为：



$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x}_1 - \omega t)} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x}_1 - \omega t) \\ &= \vec{E}_0 \cos(kr_1 - \omega t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{E}_2 &= \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x}_2 - \omega t)} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x}_2 - \omega t) \\ &= \vec{E}_0 \cos(kr_2 - \omega t)\end{aligned}$$

**p**点的总场强为：

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \\ &= \vec{E}_0 \cos(kr_1 - \omega t) + \vec{E}_0 \cos(kr_2 - \omega t) \\ &= \vec{E}_0 [\cos(kr_1 - \omega t) + \cos(kr_2 - \omega t)]\end{aligned}$$

根据三角函数关系式，即得

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot 2 \cos \pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} \cdot \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r_2 + r_1}{2\lambda} \right)$$

令  $\Delta = r_2 - r_1$ ，称为光程差，故得

$$\vec{E} = 2\vec{E}_0 \cos \pi \frac{\Delta}{\lambda} \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda} \right)$$

讨论：

**a)** 合成振幅与光程差有关，当  $\pi \frac{\Delta}{\lambda} = 2n \cdot \frac{\pi}{2}$

时，振幅最大为  $2\vec{E}_0$ ；当  $\pi \frac{\Delta}{\lambda} = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$  时，即

$\Delta = (2n + 1)\lambda / 2$ 时，振幅最小为0，这说明：叠加的结果电场强度的振幅在空间一些地方加强了，另一些地方减弱了这种现象叫做干涉 (Interference)。

b) 当光程差为半光波长的偶数倍时，合成波振幅最大；当光程差为半波长的奇数倍时，合成波振幅为0。这可以解释物理光学中的干涉现象，也足以说明电磁波包含了一定频段范围的光波。

## 2、电磁波的干涉条件

是否任何两个电磁波都能产生干涉呢？答案是否定的。要产生干涉，必须满足一定的条件。

a) 它们的电场强度和磁场强度都必须分别具有相同的振动方向。

**b)**它们的频率必须相同。

**c)**两列波的光程差不能太大。

**d)**两列波的振幅不能悬殊太大。

上述四个干涉条件，在物理光学中叫做**相干条件** (Condition of coherence)。

### 3、电磁波的衍射

当电磁波在传播过程中遇到障碍物或者透过屏幕上的小孔时，会导致偏离原来入射方向的出射电磁波，这种现象称为**衍射现象** (diffraction phenomenon)。衍射现象的研究对于光学和无线电波的传播都是很重要的。

**a) 亥姆霍兹方程(Helmholtz's equation)**

在无源空间中，电磁场 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 满足的方程为

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$$

$$k = \omega / v$$

## b) 格林函数 (Green's function)

和静电场情形一样，设  $G(\vec{x}, \vec{x}')$  是亥姆霍兹方程相应的格林函数：

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = G(x, y, z; x', y', z') = \frac{e^{ikr}}{r}$$

式中  $r = \left[ (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right]^{1/2}$

由于  $\nabla^2 G = \nabla^2 \frac{e^{ikr}}{r}$

推导  $= \frac{1}{r} \nabla^2 e^{ikr} + 2\left(\nabla \frac{1}{r}\right) \cdot (\nabla e^{ikr}) + e^{ikr} \nabla^2 \frac{1}{r}$

而

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \nabla^2 e^{ikr} + 2\left(\nabla \frac{1}{r}\right) \cdot (\nabla e^{ikr}) \\ &= \frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} e^{ikr} \right) - 2\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) \cdot (ike^{ikr} \frac{\vec{r}}{r}) \\ &= -k^2 \frac{e^{ikr}}{r} = -k^2 G \end{aligned}$$

又因为

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \right) = \begin{cases} 0 & \text{当 } r \neq 0 \\ \infty & \text{当 } r = 0 \end{cases}$$

且

$$\int_V \nabla^2 \frac{1}{r} d\tau = \int_V \nabla \cdot \nabla \frac{1}{r} d\tau = \oiint_S \nabla \frac{1}{r} \cdot d\vec{s}$$
$$= -\oiint_S \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{s} = -\oiint_S d\Omega = -4\pi$$

由此得到:

$$\nabla^2 G + k^2 G = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

注意:

亥姆霍兹方程是无源空间的波动方程，而格林函数所满足的方程是单位源集中在  $\vec{x}'$  点波动方程。因此两者相同的是：它们都是波动方程；不同的是：一是无源方程，一是点源方程。

### c) 格林公式(Green's formula)

把 $G$ 和 $\psi$  代入到格林公式中，并以带撇号表示积分变量，则有

$$\begin{aligned} & \int_V \left[ \psi(\vec{x}') \nabla'^2 G(\vec{x}', \vec{x}) - G(\vec{x}', \vec{x}) \nabla'^2 \psi(\vec{x}') \right] d\tau' \\ &= \oiint_S \left[ \psi(\vec{x}') \nabla' G(\vec{x}', \vec{x}) - G(\vec{x}', \vec{x}) \nabla' \psi(\vec{x}') \right] \cdot d\vec{s} \end{aligned}$$

其中 $d\vec{s}$  是从区域 $V$ 内指向外部的面元，如果设 $\hat{n}$  是指向区域 $V$ 内的法线，则

$$d\vec{s}' = -\hat{n} ds'$$

上式成为：

$$\begin{aligned} & \int_V \left[ \psi(\vec{x}') \nabla'^2 G(\vec{x}', \vec{x}) - G(\vec{x}', \vec{x}) \nabla'^2 \psi(\vec{x}') \right] d\tau' \\ &= \oiint_S \left[ G(\vec{x}', \vec{x}) \nabla' \psi(\vec{x}') - \psi(\vec{x}') \nabla' G(\vec{x}', \vec{x}) \right] \cdot \hat{n} ds' \end{aligned}$$

这就是格林公式。

### d) 基尔霍夫公式(Kirchhoff's formul)

把格林公式中的函数  $\psi(\vec{x}')$  ，看作是我们寻找的、描述电磁场的、满足亥姆霍兹方程的标量函数  $\psi(\vec{x})$  ，把  $G$  看成是已知的，是满足  $\nabla^2 G + k^2 G = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}')$  的格林函数。

因为

$$\begin{aligned}\nabla' G(\vec{x}', \vec{x}) &= \nabla' \frac{e^{ikr}}{r} = \frac{1}{r} \nabla' e^{ikr} + e^{ikr} \nabla' \frac{1}{r} \\ &= -ikG \frac{\vec{r}}{r} + G \frac{\vec{r}}{r^2}\end{aligned}$$

将此代入格林公式中，得

$$\begin{aligned}& \int_V \left\{ \psi(\vec{x}') \left[ -k^2 G(\vec{x}', \vec{x}) - 4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}') \right] - G(\vec{x}', \vec{x}) \left[ -k^2 \psi(\vec{x}') \right] \right\} d\tau' \\ &= \oiint_S \left\{ G(\vec{x}', \vec{x}) \nabla' \psi(\vec{x}') - \psi(\vec{x}') \left[ -ikG(\vec{x}', \vec{x}) \frac{\vec{r}}{r} + G(\vec{x}', \vec{x}) \frac{\vec{r}}{r^2} \right] \right\} \cdot \hat{n} ds'\end{aligned}$$

展开后，等式左边为

$$\int_V -\psi(\vec{x}')4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}')d\tau' = -4\pi\psi(\vec{x})$$

所以

$$\begin{aligned}\psi(\vec{x}) &= -\frac{1}{4\pi} \oiint_S \left\{ G(\vec{x}' \cdot \vec{x}) \nabla' \psi(\vec{x}') - \psi(\vec{x}') \left[ -ikG(\vec{x}' \cdot \vec{x}) \frac{\vec{r}}{r} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + G(\vec{x}' \cdot \vec{x}) \frac{\vec{r}}{r^2} \right] \right\} \cdot \hat{n} d\bar{s} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \oiint_S \frac{e^{ikr}}{r} \hat{n} \cdot \left[ \nabla' \psi(\vec{x}') + \left( ik - \frac{1}{r} \right) \frac{\vec{r}}{r} \psi(\vec{x}') \right] ds'\end{aligned}$$

这就是基尔霍夫公式。

讨论：

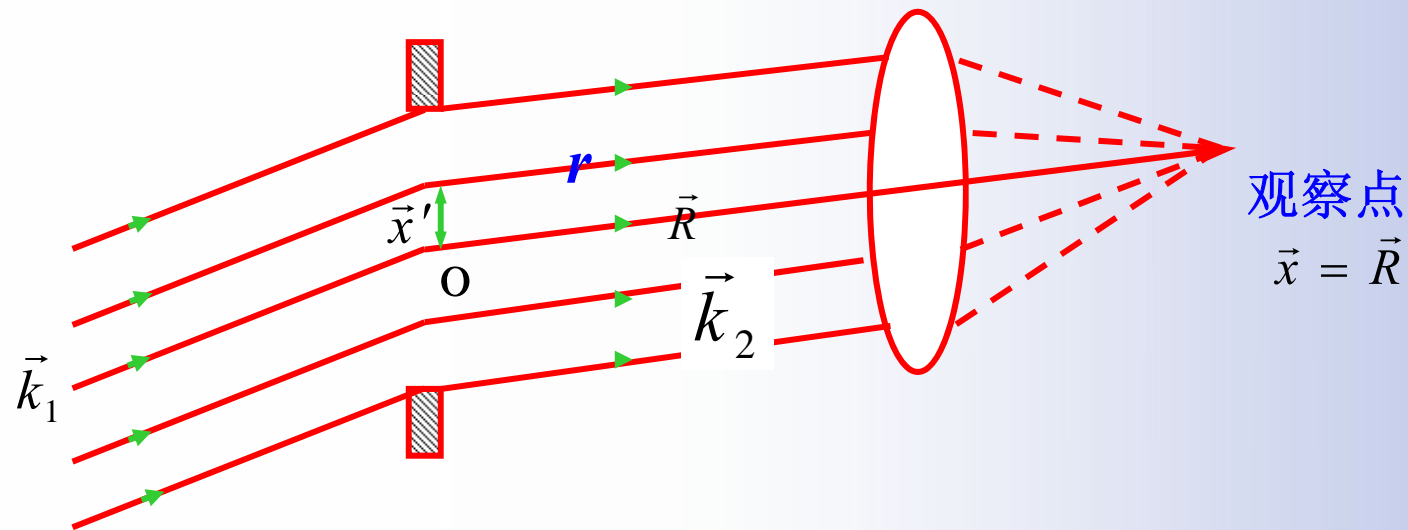
① 公式把区域 $V$ 内任一点  $\vec{x}$  处的场  $\psi(\vec{x})$  用  $V$  的边界面 $S$ 上的  $\psi(\vec{x}')$  和  $\frac{\partial \psi(\vec{x}')}{\partial n}$  表示出来，是惠更斯原理的数学表示。

② 公式中的因子  $\frac{e^{ikr}}{r}$  表示曲面 $S$ 上的点  $\vec{x}'$  向  $V$ 内  $\vec{x}$  点传播的波。波源的强度由  $\vec{x}'$  点上的  $\psi(\vec{x}')$  和  $\frac{\partial \psi(\vec{x}')}{\partial n}$  值确定。因此，曲面上每一点可以看作次级光源发射的波的叠加。

③ 公式不是边值问题的解，它仅是把  $\psi$  用边值表示出的积分表达式。

### e) 矩形孔的夫琅和费衍射

夫琅和费衍射(Fraunhofer's diffraction)指的是：一平行光线入射到矩形孔上，发生衍射，根据实际情况，设矩形孔的边长为 $2a$ 和 $2b$ ，除矩形孔外，其它部分不透光。



因此，基尔霍夫公式中对闭合面的积分，只对矩形孔积分：

$$\psi(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\text{孔}} \frac{e^{ikr}}{r} \hat{n} \cdot \left[ \nabla' \psi + \left( ik - \frac{1}{r} \right) \frac{\vec{r}}{r} \psi \right] ds'$$

假设在孔面上，入射波是平面波，波矢量为 $\vec{k}'$ ，即

$$\psi(\vec{x}') = \psi_0 e^{i\vec{k}'_1 \cdot \vec{x}'}$$

其中： $\psi_0$  为原点处 $\psi(\vec{x}')$  的值。

$$\nabla' \psi(\vec{x}') = i\vec{k}'_1 \psi_0 e^{i\vec{k}'_1 \cdot \vec{x}'} = i\vec{k}'_1 \psi(\vec{x}')$$

由于 $\vec{k}'_1$ 和 $\vec{k}'_2$ 的方向不同，但由于衍射不改变波的

频率和波长，可见 $k_1$ 和 $k_2$ 的大小却应该相等，即 $k_1 = k_2 = k$ ，因此有

$$\begin{aligned}r^2 &= R^2 + x'^2 - 2\vec{R} \cdot \vec{x}' \\r &= R \left( 1 + \frac{x'^2}{R^2} - \frac{2\hat{n} \cdot \vec{x}'}{R} \right)^{1/2} \\&= R \left( 1 - \frac{2\hat{n} \cdot \vec{x}'}{R} + \frac{x'^2}{R^2} \right)^{1/2}\end{aligned}$$

展开得到:

$$\begin{aligned} r &= R \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{2\hat{n} \cdot \vec{x}'}{R} + \dots \right) \\ &= R - \hat{n} \cdot \vec{x}' = R - \frac{\vec{k}_2 \cdot \vec{x}'}{k_2} = R - \frac{\vec{k}_2 \cdot \vec{x}'}{k} \end{aligned}$$

这里  $\frac{\vec{k}_2}{k} = \hat{n}$  是由孔面指向观察点的,  $\frac{\vec{r}}{r} = \hat{n}$  是由积分面指向观察点的。

把 $z$ 轴与孔垂直，这时且有

$$\psi(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\text{孔}} \frac{e^{ikr}}{r} \hat{n} \left[ i\vec{k}_1 \psi_0 e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}'} + \left( ik - \frac{1}{r} \right) \frac{\vec{r}}{r} \psi_0 e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}'} \right] ds'$$

略去  $\frac{1}{r}$  高次项，得

$$\begin{aligned} \psi(\vec{x}) &= -\frac{1}{4\pi} \iint_{\text{孔}} \frac{e^{ik(R - \frac{\vec{k}_2 \cdot \vec{x}'}{k})}}{R - \frac{\vec{k}_2 \cdot \vec{x}'}{k}} \hat{n} \cdot \left[ i\vec{k}_1 \psi_0 e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}'} + ik \psi_0 e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}'} \frac{\vec{k}_2}{k} \right] dx' dy' \\ &= -\frac{1}{4\pi R} i \psi_0 e^{ikR} \iint e^{i(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{x}'} (\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \cdot \hat{n} dx' dy' \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} \iint_{\text{孔}} e^{i(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{x}'} \hat{n} dx' dy' &= \int_{-a}^a dx' e^{i(k_{1x} - k_{2x})x'} \int_{-b}^b dy' e^{i(k_{1y} - k_{2y})y'} \\ &= 4 \frac{\sin(k_{1x} - k_{2x})a}{k_{1x} - k_{2x}} \cdot \frac{\sin(k_{1y} - k_{2y})b}{k_{1y} - k_{2y}} \end{aligned}$$

所以得到:

$$\begin{aligned} \psi(\vec{x}) &= -\frac{i\psi_0 e^{ikR}}{4\pi R} (\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \cdot \hat{n} 4 \frac{\sin(k_{1x} - k_{2x})a}{k_{1x} - k_{2x}} \\ &\quad \cdot \frac{\sin(k_{1y} - k_{2y})b}{k_{1y} - k_{2y}} \end{aligned}$$

而且，光强  $I$  和振幅的模平方成正比，即

$$I \sim |\psi|^2$$

由此可知。

$$I = \frac{\psi_0^2}{\pi^2 R^2} (k_{1z} + k_{2z})^2 \left[ \frac{\sin(k_{1x} - k_{2x})a \sin(k_{1y} - k_{2y})b}{(k_{1x} - k_{2x})(k_{1y} - k_{2y})} \right]^2$$

如果用  $(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ 、 $(\frac{\pi}{2} - \beta)$ 、 $\theta$  表示  $\vec{k}_2$  与  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴的  
夹角

$$k_{2x} = k_2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = k \sin \alpha$$

$$k_{2y} = k_2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = k \sin \beta$$

$$k_{2z} = k_2 \cos \theta = k \cos \theta$$

当光垂直入射到矩形孔面时，有

$$k_{1x} = k_{1y} = 0, \quad k_{1z} = k.$$

故

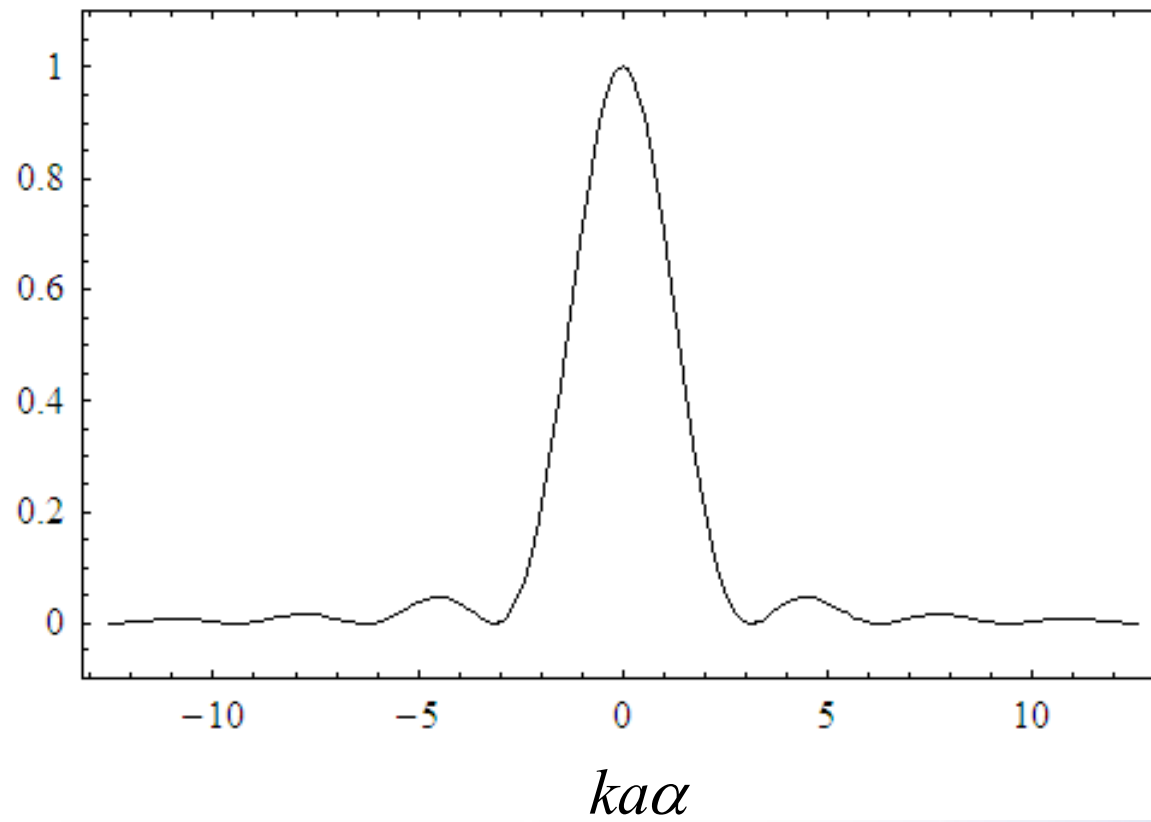
$$I = \frac{\psi_0^2}{\pi^2 R^2} (1 + \cos \theta)^2 \left[ \frac{\sin(ak \sin \alpha) \sin(bk \sin \beta)}{k \sin \alpha \cdot k \sin \beta} \right]^2$$

且在小角度衍射时， $\alpha, \beta$  为小角，因而

$$\sin \alpha \approx \alpha, \sin \beta \approx \beta, \cos \theta \approx 1$$

$$I = I_0 (1 + \cos \theta)^2 \left[ \frac{\sin(k\alpha a)}{k\alpha} \right]^2 \left[ \frac{\sin(k\beta b)}{k\beta} \right]^2$$

# 强度分布曲线



# 补充讨论

菲涅尔—基尔霍夫衍射积分存在一定自我矛盾

$$\begin{aligned}\psi(\vec{x}) &= -\frac{1}{4\pi} \iiint \left[ G \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial G}{\partial n} \right] dS \\ &= -\frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \left[ G \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial G}{\partial n} \right] dS_1 - \frac{1}{4\pi} \iint_{S_2} \left[ G \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial G}{\partial n} \right] dS_2 \\ &= -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[ G \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial G}{\partial n} \right] d\Sigma - \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1'} \left[ G \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial G}{\partial n} \right] dS_1'\end{aligned}$$

0, 要求条件  $\psi|_{S_1'} = \frac{\partial \psi}{\partial n}|_{S_1'} = 0$

矛盾!

## 补充讨论

### 瑞利—索末菲衍射理论（改造格林函数）

第Ⅰ类:

$$\psi_{\text{I}}(\vec{x}) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} \psi \frac{\partial G}{\partial n} d\Sigma$$

第Ⅱ类:

$$\psi_{\text{II}}(\vec{x}) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} G \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Sigma$$

详情参见《现代光学教程》

## § 5.7 电磁场的动量

### Momentum of Electromagnetic Field

电磁场和带电体之间有相互作用力。场对带电粒子施以作用力，粒子受力后，它的动量发生变化，同时电磁场本身的状态亦发生相应的改变。因此，电磁场也和其他物体一样具有动量。辐射压力是电磁场具有动量的实验证据。

本节从电磁场与带电物质的相互作用规律出发导出电磁场动量密度表达式。

# 1、电磁场的动量密度和动量流密度

场对带电体的作用为**Lorentz力**，在Lorentz力作用下带电体的机械动量变化为

$$\frac{d\vec{G}_{\text{机}}}{dt} = \int_V \vec{f} d\tau = \int_V (\rho\vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}) d\tau \quad \text{推导}$$

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}$$

$$= \varepsilon_0 (\nabla \cdot \vec{E}) \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \times \vec{B}$$

而

$$\frac{1}{\mu_0}(\nabla \cdot \vec{B})\vec{B} + \varepsilon_0(\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) \times \vec{E} = 0$$

把此式与  $\vec{f}$  的表达式相加，则有

$$\begin{aligned} \vec{f} &= \varepsilon_0(\nabla \cdot \vec{E})\vec{E} + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \cdot \vec{B})\vec{B} \\ &+ \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \vec{B} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \times \vec{B} \\ &+ \varepsilon_0(\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) \times \vec{E} \end{aligned}$$

其中因为：

$$\begin{aligned} & (\nabla \cdot \vec{E})\vec{E} + (\nabla \times \vec{E}) \times \vec{E} \\ &= (\nabla \cdot \vec{E})\vec{E} + \left[ -\frac{1}{2} \nabla(\vec{E} \cdot \vec{E}) + (\vec{E} \cdot \nabla)\vec{E} \right] \\ &= \nabla \cdot (\vec{E}\vec{E}) - \frac{1}{2} \nabla(\vec{E} \cdot \vec{E}) \\ &= \nabla \cdot (\vec{E}\vec{E}) - \frac{1}{2} \nabla \cdot (E^2 \vec{I}) \\ &= \nabla \cdot \left( \vec{E}\vec{E} - \frac{1}{2} E^2 \vec{I} \right) \end{aligned}$$

式中  $\vec{I}$  是单位张量，即  $\vec{I} = \vec{i}\vec{i} + \vec{j}\vec{j} + \vec{k}\vec{k}$ （直角坐标），与  $\nabla$  方向一致。同理得到：

$$\begin{aligned} & (\nabla \cdot \vec{B})\vec{B} + (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} \\ &= \nabla \cdot (\vec{B}\vec{B} - \frac{1}{2}B^2\vec{I}) \end{aligned}$$

而且

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{s}}{\partial t} &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{s}}{\partial t} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{H}) \\ &= \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) = \varepsilon_0 \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} + \vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

这样一来，则有

$$\vec{f} = \nabla \cdot \left\{ \varepsilon_0 \left[ \vec{E}\vec{E} - \frac{1}{2} E^2 \vec{I} \right] + \frac{1}{\mu_0} \left[ \vec{B}\vec{B} - \frac{1}{2} B^2 \vec{I} \right] \right\} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \bar{s}}{\partial t}$$

或者化为

$$\vec{f} = -\nabla \cdot \vec{T} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \bar{s}}{\partial t}$$

其中

$$\vec{T} = -\varepsilon_0 \vec{E}\vec{E} - \frac{1}{\mu_0} \vec{B}\vec{B} + \frac{1}{2} \left( \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) \vec{I}$$

至此，可以把机械动量的变化率写成

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{G}_{\text{机}}}{dt} &= -\int_V \nabla \cdot \vec{T} d\tau - \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{c^2} \vec{s} d\tau \\ &= -\oiint_S \vec{T} \cdot d\vec{s} - \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{c^2} \vec{s} d\tau\end{aligned}$$

讨论：

a) 若积分区域 $V$  为全空间，则面积分项为零，而

$$\frac{d\vec{G}_{\text{机}}}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_{\infty} \frac{1}{c^2} \vec{s} d\tau$$

根据动量守恒定律，带电体的机械动量的增加等于电磁场的动量的减少，因此称

$$\vec{G}_{\text{电磁}} = \int_{\infty} \frac{1}{c^2} \vec{s} d\tau = \int_{\infty} \epsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B}) d\tau$$

为电磁动量，而把

$$\vec{g} = \frac{1}{c^2} \vec{s} = \epsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B})$$

称为电磁场动量密度 ( **electromagnetic field momentum density** )。

$$\vec{G}_{\text{机}} + \vec{G}_{\text{电磁}} = \text{constant}$$

注意：对于平面电磁波，有平均动量密度

$$\begin{aligned}\vec{g} &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \operatorname{Re} (\vec{E}^* \times \vec{B}) \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2c} |E|^2 \hat{n} \\ &= \frac{1}{c} w \hat{n}\end{aligned}$$

**b)** 若积分区域  $V$  为有限空间，则面积分项不为零，即

$$\frac{d\vec{G}_{\text{机}}}{dt} = -\oiint_S \vec{T} \cdot d\vec{s} - \frac{d}{dt} \int_V \vec{g} d\tau$$

机械动量

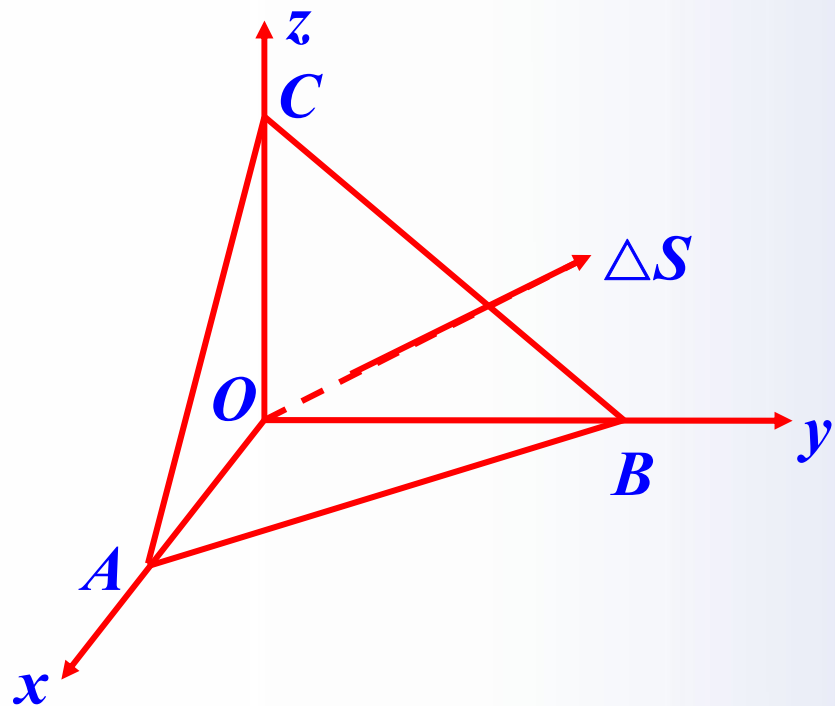
动量流

电磁动量

因为等式左边项表示机械动量，右边第二项代表了电磁动量，因此右边第一项也必然具有动量的意义，而它是面积分，所以把它解释为穿过区域  $V$  的边界面  $S$  流入体内的动量流。故称  $\vec{T}$  为电磁场动量流密度 (electromagnetic field momentum flow density), 亦称之为 Maxwell 应力张量或张力张量.

$\vec{T}$

麦克斯韦应力张量分量的具体解释为：



设 $ABC$ 为一面元 $\Delta\vec{S}$ ，这面元的三个分量为三角形 $OBC$ 、 $OCA$ 和 $OAB$ 的面积， $OABC$ 是一个体积元

$\Delta V$ ，通过界面***OBC***单位面积流入体内的动量三个分量为：

$$T_{11}、 T_{12}、 T_{13}；$$

通过界面***OCA***单位面积流入体内的动量三个分量为：

$$T_{21}、 T_{22}、 T_{23}；$$

通过界面***OAB***单位面积流入体内的动量三个分量为：

$$T_{31}、 T_{32}、 T_{33}；$$

当  $\Delta V \rightarrow 0$  时，通过这三个面流入体内的动量等

于从面元 $ABC$ 流出的动量。因此，通过 $ABC$ 面流出的动量各分量为：

$$\Delta p_1 = \Delta S_1 T_{11} + \Delta S_2 T_{21} + \Delta S_3 T_{31}$$

$$\Delta p_2 = \Delta S_1 T_{12} + \Delta S_2 T_{22} + \Delta S_3 T_{32}$$

$$\Delta p_3 = \Delta S_1 T_{13} + \Delta S_2 T_{23} + \Delta S_3 T_{33}$$

写成矢量式：

$$\Delta \vec{p} = \Delta \vec{S} \cdot \vec{T}$$

这就是通过面元  $\Delta \vec{S}$  流出的动量。

举例，考虑平面电磁波的动量流密度张量  
对于平面波有 $\mathbf{E}$ ， $\mathbf{B}$ ， $\mathbf{k}$ 三个矢量互相正交  
现在求：

$$\begin{aligned}\vec{E} \cdot \vec{T} &= -\varepsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{E} \vec{E} - \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot \vec{B} \vec{B} + \frac{1}{2} \left( \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) \vec{E} \cdot \vec{I} \\ &= -\varepsilon_0 E^2 \vec{E} + \frac{1}{2} \left( \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) \vec{E}\end{aligned}$$

再利用：

$$\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{\mu_0} B^2$$

$$\vec{E} \cdot \vec{T} = -\varepsilon_0 E^2 \vec{E} + \frac{1}{2} (\varepsilon_0 E^2 + \varepsilon_0 E^2) \vec{E} = 0$$

同样可以得到:

$$\vec{B} \cdot \vec{T} = 0$$

再来看:

$$\begin{aligned}\vec{k} \cdot \vec{T} &= \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) \vec{k} \cdot \vec{I} \\ &= \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) \vec{k} = w \vec{k}\end{aligned}$$

所以,

$$\vec{T} = w \vec{e}_k \vec{e}_k$$

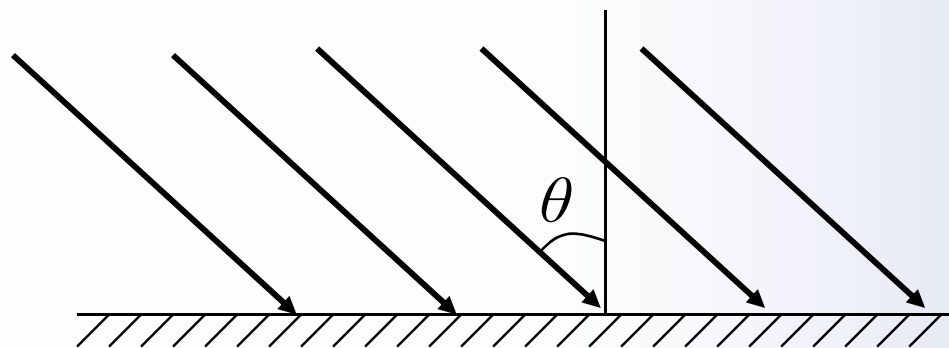
如 $\mathbf{k}$ 方向选择 $\mathbf{z}$ 轴, 则  $\vec{T}$  只有 $T_{33}$ 分量,  $T_{33} = cg$

### 3、辐射压力(Radiation pressure)

电磁场作为物质在流动（辐射）时，一旦遇到其他物体，就会发生相互作用力，由电磁场引起的对其他物体的压力称为辐射压力。如果是可见光引起的辐射压力，通常称之为光的压力。

由电磁场动量密度式和动量守恒定律可以算出**辐射压力**。

假有一平面电磁波的以  $\theta$  角入射于理想导体表面上而被全部反射，试求此导体表面所受到的辐射压力。



导体表面对空间电磁波所施加的作用为，等于单位表面上电磁动量在单位时间内所发生的变化。由于作用力与反作用力大小相等，它的量值就等于电磁波对物体单位表面所施加的压力。由于电磁波的传播速度为 $c$ ，在单位时间内射到单位横截面的电磁动量为：

$$\bar{g} \cdot (c \cdot 1) = \frac{\bar{s}}{c} = \bar{w}$$

设电磁波的入射角为 $\theta$ ，则单位时间内射到单位表面积上的电磁动量为

$$f_1 = \bar{g}c \cos \theta = \bar{w} \cos \theta$$

同样，在单位时间内被物体单位表面反射的电磁动量为

$$f_2 = R\bar{g}c \cos \theta = R\bar{w} \cos \theta$$

这里的 $R$ 为反射系数。因此，单位时间内动量在法向的变化为：

$$\begin{aligned} P &= f_1 \cos \theta + f_2 \cos \theta \\ &= (1 + R)\bar{g}c \cos^2 \theta = (1 + R)\bar{w} \cos^2 \theta \end{aligned}$$

即介质表面受到电磁波作用产生的压强，若电磁波在各方向都以同样强度辐射（例如空腔内的黑体辐射），它的总平均辐射能量密度为 $\bar{w}$ ，那么投影到方向在 $\theta$ 到 $\theta+d\theta$ 之间的能量密度为：

$$d\bar{w} = \frac{\bar{w}}{4\pi} \cdot 2\pi \sin \theta d\theta = \frac{\bar{w}}{2} \sin \theta d\theta$$

于是介质表面受到各个方向射来的电磁波作用产生的总压力为

$$P = (1 + R) \frac{\bar{w}}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{1 + R}{6} \bar{w}$$

在理想导体表面，电磁波发生全反射，这时反射系数 $R=1$ ，此时即有

$$P = \frac{1}{3} \overline{w}$$

地球表面由于太阳光辐射而受到的总辐射压力约为 $7 \times 10^8 N$ ，而受到太阳的万有引力为 $3 \times 10^{22} N$ ，因此一般可以忽略辐射压力。