第四章 电磁波的传播

Propagation of Electromagnetic Wave

本章所要研究的问题是：讯变情况下，电磁场的运动方式和规律。根据**Maxwell**方程，我们知道变化的电场和磁场可以互相激发，形成在空间中传播的电磁波。所以本章着重探讨的是电磁波的存在形式和运动方式。

本 章 主 要 内 容

平面电磁波

电磁波在介质介面上的反射和折射

导体存在时的电磁波传播

波导和谐振腔

光学波导

等离子体

高斯光束

§4.1平面电磁波

Plane Electromagnetic Wave

1、真空中电磁波的波动方程

介质中**Maxwell**方程组

$$
\begin{cases}
\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\
\nabla\times\vec{H}=\vec{j}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}\\
\nabla\cdot\vec{D}=\rho\\
\nabla\cdot\vec{B}=0
\end{cases}
$$

在没有电荷，没有电流的自由空间，

$\vec{j}=0,\ \rho=0$ ，并利用 $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E},\ \vec{B}=\mu_0\vec{H}$

可以得到齐次**Maxwell**方程组

$$
\begin{cases}
\nabla\times\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} & (1)\\[2ex]
\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} & (2)\\[2ex]
\nabla\cdot\vec{E}=0 & (3)\\[2ex]
\nabla\cdot\vec{B}=0 & (4)
\end{cases}
$$

$\nabla \times (1)$ 可得：

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \nabla \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{E}) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{B} \quad (5)$$

$$\left.\begin{array}{r} \nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{array}\right\} \nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = -\nabla^2 \vec{B} \quad (6)$$

由**(5)**、**(6)**得

$$\boxed{\nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0}$$

同样可得，

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0}$$

令： $\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$

我们可以得到真空中的波动方程：

$$\boxed{\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0} \qquad \boxed{\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0}$$

由此可得，真空中电磁场的传播速度为c

2、定态波动方程

由介质的微观结构可知，对不同频率的介电常数是不同的，即 ε和μ是角频率ω的函数

$$\varepsilon = \varepsilon(\vec{x}, \omega) \qquad \mu = \mu(\vec{x}, \omega)$$

在频率固定的情况下，介质中有关系

$$\vec{D} = \varepsilon(\omega)\vec{E} \quad \vec{B} = \mu(\omega)\vec{H}$$

因此，对于一定频率的电磁波，即定态电磁波的波动方程设频率为 ω则有

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E}(\vec{x},t) &= \vec{E}(\vec{x})\exp(-i\omega t)\\ \vec{B}(\vec{x},t) &= \vec{B}(\vec{x})\exp(-i\omega t)\end{aligned}}$$

代入麦克斯韦方程组，整理可得

$$\left.\begin{aligned}\nabla\times\vec{E} &= i\omega\vec{B}\\ \nabla\times\vec{B} &= -i\omega\mu\varepsilon\vec{E}\\ \nabla\cdot\vec{E} &= 0\\ \nabla\cdot\vec{B} &= 0\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow\left.\begin{aligned}\nabla\times(\nabla\times\vec{E}) &= i\omega\nabla\times\vec{B} = i\omega(-i\omega\mu\varepsilon)\vec{E} = \omega^2\mu\varepsilon\vec{E}\\ \nabla\times(\nabla\times\vec{E}) &= \nabla(\nabla\cdot\vec{E}) - \nabla^2\vec{E} = -\nabla^2\vec{E}\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow\quad -\nabla^2\vec{E}=\omega^2\mu\varepsilon\vec{E}$$

令 $\boxed{\omega^2\mu\varepsilon=k^2}$

可得 $\begin{cases}\nabla^2\vec{E}+k^2\vec{E}=0 \\ \nabla\cdot\vec{E}=0\end{cases}$ 亥姆霍兹方程

$\vec{B}$ 可由 $\vec{B}=\dfrac{-i}{\omega}\nabla\times\vec{E}$ 求出

归纳如下:

$$\begin{cases}\nabla^2\vec{E}+k^2\vec{E}=0\\ \nabla\cdot\vec{E}=0\\ \vec{B}=\dfrac{-i}{\omega}\nabla\times\vec{E}\end{cases}\qquad\begin{cases}\nabla^2\vec{B}+k^2\vec{B}=0\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\\ \vec{E}=\dfrac{i}{\omega\mu\varepsilon}\nabla\times\vec{B}\end{cases}$$

小结：电磁波在介质中的传播满足亥姆霍兹方程，其解即显示了电磁波在介质中如何传播。

3、平面电磁波

平面波定义：

波阵面与波矢垂直的平面，平面上的点相位相等。

亥姆霍兹方程：　$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0$

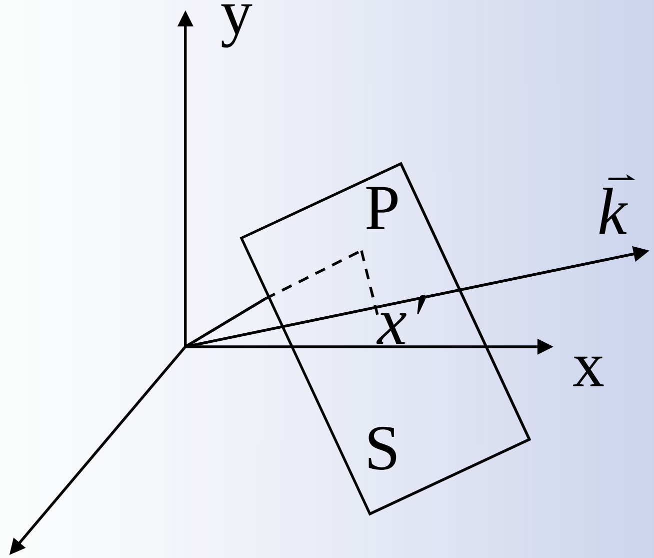
它的一个解是　$\vec{E}(\vec{x}) = \vec{E}_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$

其中 $\vec{E}_0$ 是常矢量

场强的全表示式为

$$\vec{E}\left(\vec{x},t\right)=\vec{E}_0e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t\right)}$$

表示沿波矢 **k** 方向传播的平面波



图中 $\vec{k}\cdot\vec{x}=kx'$

所以**S**是等相面

以上为了计算方便，把场强表示成复数形式，实际存在的场强应理解为上式的实数部分。

实部： $\vec{E}(\vec{x},t)=\vec{E}_0\cos\left(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t\right)$

$\vec{k}$ 方向代表波传播的方向，数值**k**称为圆波数。

由于 $\vec{k}\cdot\vec{x}=kx'$ 沿电磁波传播方向相距为 $\Delta x'=2\pi/k$ 的两点有相位差 2π，因此这两点的距离即为波长 λ，

$$\lambda=\frac{2\pi}{k} \longrightarrow \boxed{k=\frac{2\pi}{\lambda}}$$

对同一相位的演化

$$\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t=kx'-\omega t=A$$

$$x'=\frac{\omega}{k}t+\frac{A}{k}$$

得到相速度： $$\frac{dx'}{dt}=\frac{\omega}{k}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}=v$$

在介质中，不同频率的电磁波具有不同的相速度，这就是介质的色散现象。

$$\because \nabla\cdot\vec{E}=0$$

$$\therefore \vec{E}_0\cdot\nabla e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t\right)}=\vec{E}_0\cdot i\vec{k}e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t\right)}=i\vec{k}\cdot\vec{E}=0$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\vec{k}\perp\vec{E}}$$

上式表明，平面电磁波是横波，$\vec{E}$可在垂直于 $\vec{k}$ 的任意方向上振荡。可以选取与 $\vec{k}$ 垂直的任意两个互相正交方向作为 $\vec{E}$ 的两个独立偏振方向。因此，每一个波矢量 $\vec{k}$ 存在两个独立的偏振波。

$$\vec{B}=\frac{-i}{\omega}\nabla\times\vec{E}$$

$$=\frac{-i}{\omega}i\vec{k}\times\vec{E}=\frac{\vec{k}}{\omega}\times\vec{E}=\sqrt{\mu\varepsilon}\frac{\vec{k}}{k}\times\vec{E} \Rightarrow \begin{cases}\vec{E}\times\vec{B}//\vec{k}\\ \left|\frac{\vec{E}}{\vec{B}}\right|=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}=v\end{cases}$$

$$\vec{k}\cdot\vec{B}=\sqrt{\mu\varepsilon}\vec{k}\cdot(\frac{\vec{k}}{k}\times\vec{E})=0 \Rightarrow \boxed{\vec{B}\perp\vec{k}}$$

因此，磁场也垂直于波矢量 $\vec{k}$，即磁场也是横波，$\vec{E},\vec{B}$和$\vec{k}$是成右手螺旋，三个互相正交矢量，且 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 相位相同，振幅比为

$$\boxed{\left|\frac{\vec{E}}{\vec{B}}\right|=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}=v}$$

在真空中，平面电磁波的电场和磁场比值为

$$\left|\frac{\vec{E}}{\vec{B}}\right| = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = c$$

注意：高斯单位制中比值为**1**

综上述，平面电磁波有如下特征：

（**1**） $\vec{E} \perp \vec{k}$ $\quad \vec{B} \perp \vec{k}$ 电磁波为横波

（**2**） $\vec{E} \perp \vec{B}$ $\quad \vec{E} \times \vec{B} // \vec{k}$

（**3**） $\vec{E}, \vec{B}$ 同相，比值为 V

注意：如果不是平面电磁波就没有上述的特征。

4、平面电磁波的能量和能流

电磁场的能量密度为

$$w = \frac{1}{2}(\vec{B} \cdot \vec{H} + \vec{E} \cdot \vec{D})$$

在定态条件下 $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}$

则

$$w = \frac{1}{2}(\vec{B} \cdot \vec{H} + \vec{E} \cdot \vec{D}) = \frac{1}{2}(\varepsilon E^2 + \frac{1}{\mu} B^2)$$

在平面波条件下

$$\frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \Longrightarrow \varepsilon E^2=\frac{1}{\mu}B^2$$

即平面电磁波中电场能量密度和磁场能量密度相等，因此电磁场能量密度为：

$$w=\varepsilon E^2=\frac{1}{\mu}B^2$$

能流密度

$$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}=\vec{E}\times\frac{1}{\mu}\vec{B}=\vec{E}\times(\frac{\vec{k}}{\mu\omega}\times\vec{E})$$

$$=\frac{\vec{k}}{\mu\omega}E^2=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{\vec{k}}{k}E^2=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\vec{n}w=wv\vec{n}$$

该式说明能流密度的物理意义是带着能量沿着电磁波传播方向以速度v运动。

周期为T，能量密度平均值为 $\bar{w} = \frac{1}{T}\int_{o}^{T} w dt$

$$w = \varepsilon E_0^2 \cos^2(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t) = \frac{1}{2}\varepsilon E_0^2[1 + \cos 2(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)]$$

可得 $$\boxed{\bar{w} = \frac{1}{2}\varepsilon E_0^2 = \frac{1}{2\mu} B_0^2}$$

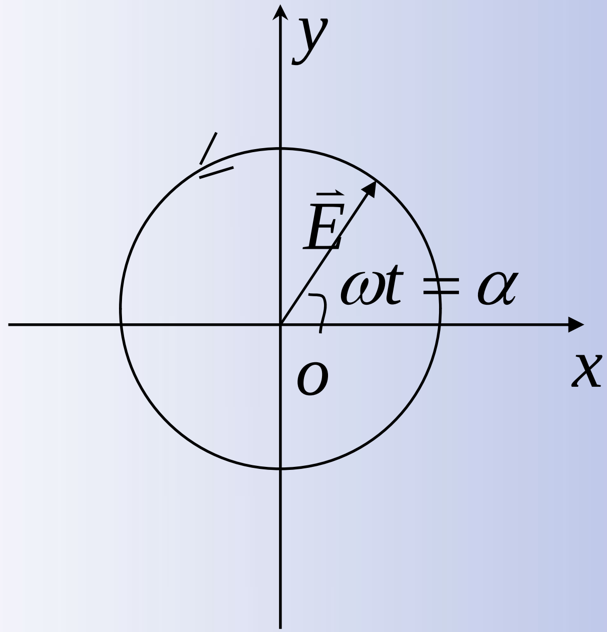
其中利用了 $\frac{1}{T}\int_0^T \cos 2(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t) dt = 0$

平均能流密度 $$\bar{\vec{S}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\vec{E}^* \times \vec{H}) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0^2 \vec{n} = \bar{w} v \vec{n}$$

例

两波函数：$\vec{E}_1 = E_0 \vec{e}_x e^{i(k_z z - \omega t)}$,

$$\vec{E}_2 = E_0 \vec{e}_y e^{i\left(k_z z - \omega t + \frac{\pi}{2}\right)} = iE_0 \vec{e}_y e^{i(k_z z - \omega t)}$$



合成后：$\vec{E} = E_0 \left(\vec{e}_x + i\vec{e}_y\right) e^{i(k_z z - \omega t)}$

实部：$\vec{E} = E_0 \left[\cos\left(k_z z - \omega t\right)\vec{e}_x - \sin\left(k_z z - \omega t\right)\vec{e}_y\right]$ 圆偏振

由：$\vec{B} = \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}\, \vec{n} \times \vec{E} = \frac{1}{c}\vec{e}_z \times \vec{E} = \frac{E_0}{c}\left(\vec{e}_y - i\vec{e}_x\right) e^{i(k_z z - \omega t)}$

$$\bar{\vec{S}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{E}^* \times \vec{H}\right) = \sqrt{\varepsilon_0 / \mu_0}\, E_0^2 \vec{e}_z$$