

§ 1.5 介质的电磁性质

Electromagnetic Property in Medium

根据电磁学的观点，介质是一个带电粒子系统，其内部存在微观电磁场。宏观电动力学 (经典电动力学) 不是考察个别粒子产生的微观电磁场，而是考察它们的**宏观平均值**。

由于介质在宏观电磁场的作用下，将被极化和磁化，即出现宏观的**附加电荷和电流**，这些附加的电荷和电流也要激发电磁场，使原来的宏观电磁场有所改变。所以在介质的极化和磁化过程中，电荷和电场、电流和磁场是互相制约的，介质的内部宏观电磁现象就是这些电荷、电流分布和电磁场之间相互作用的结果。

本节将要研究的是介质在外场作用下可能出现哪些**附加电荷和电流**。

1、介质的极化 (polarization of dielectric)

介质的极化说明介质对电场的反映，在有电场的情况下，介质中的正负电荷分别受到方向相反的作用力，因此正负电荷间的距离拉开了。另外，那些有极分子在电场作用下按一定方向有序排列，从宏观上来看这两种行为都相当于产生了一个电偶极矩。在电磁学中，曾引进了极化强度矢量：

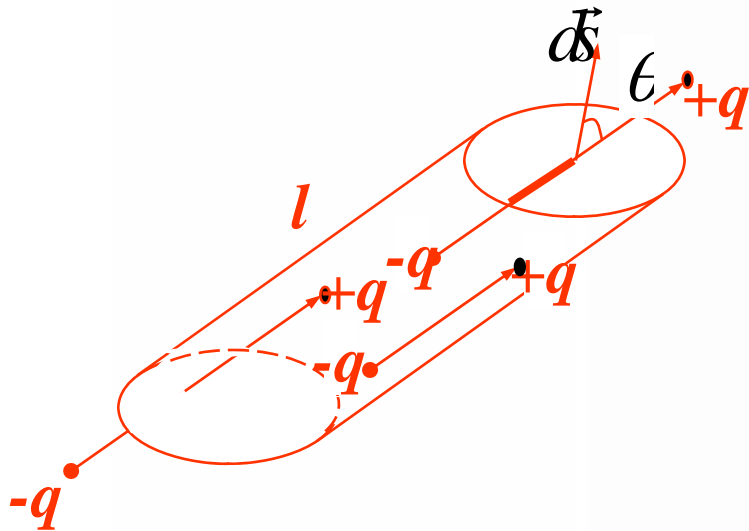
$$\vec{P} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\Delta\tau}$$

其中 \vec{p}_i 是第 i 个分子的电偶极矩，即 $\vec{p}_i = q_i \vec{l}_i$ ，求和是对 $\Delta\tau$ 体积中所有分子进行的。

a) 极化电荷体密度与极化强度的关系

由于极化，正负电荷间发生了相对位移，每处的正负电荷可能不完全抵消，这样就呈现宏观电荷，称之为极化电荷。

若极化时正负电荷拉开的位移为 \vec{l} ，设介质分子密度为 n ，则通过 $d\vec{s}$ 面跑出去的正电荷数目为 $nd\vec{s} \cdot \vec{l}$



$$dQ = qn\vec{l} \cdot d\vec{s} = \vec{p} \cdot d\vec{s}$$

从封闭曲面跑出去的总电荷 $Q = \oiint_S \vec{P} \cdot d\vec{s}$

由于介质是电中性的， $\oiint_S \vec{P} \cdot d\vec{s}$ 也等于V内净余的负电荷，即

$$Q_p = -Q = -\oiint_S \vec{P} \cdot d\vec{s}$$

因为 $Q_p = \int_V \rho_p d\tau$

式中V是S所包围的体积，所以

$$\int_V \rho_p d\tau = -\oiint_S \vec{P} \cdot d\vec{s} = -\int_V \nabla \cdot \vec{P} d\tau$$

即 $\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}$

负电荷 → 正电荷

b) 极化电流密度与极化强度的关系

当电场随时间改变时，极化过程中正负电荷的相对位移也将随时间改变，由此产生的电流称为极化电流。极化电流和极化电荷也满足连续性方程：

$$\nabla \cdot \vec{j}_p + \frac{\partial \rho_p}{\partial t} = 0$$

即

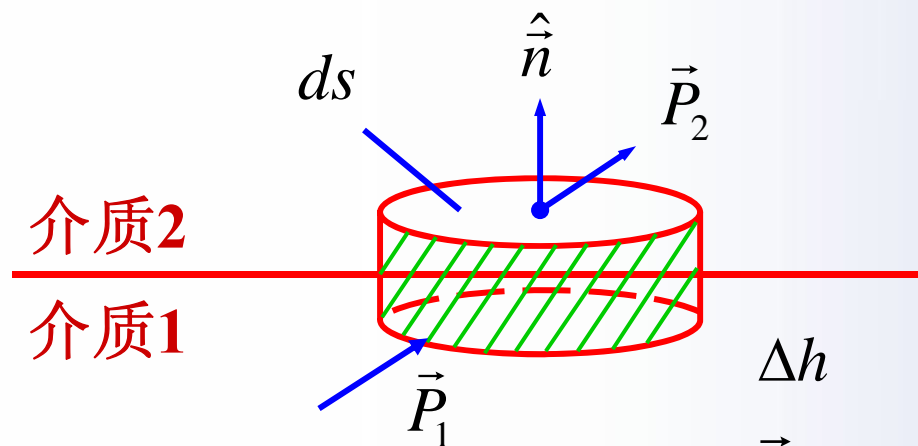
$$\nabla \cdot \vec{j}_p = -\frac{\partial \rho_p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{P} = \nabla \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

所以

$$\vec{j}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad \text{称为极化电流密度}$$

c) 极化电荷面密度与极化强度的关系

因为在非均匀介质内部，极化后一般出现极化电荷。在均匀介质中，极化电荷只出现在介质界面上。在介质1和介质2分界面上取一个面元为 $d\vec{s}$ ，在分界面两侧取一定厚度的薄层，使分界面包围在薄层内。



通过薄层进入介质2的正电荷为 $\vec{P}_2 \cdot d\vec{s}$ ，由介质1通过薄层下侧面进入薄层的正电荷为 $\vec{P}_1 \cdot d\vec{s}$ 因此薄层出现的净余电荷为

$$dQ_p = -(\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \cdot d\vec{s}$$

以 σ_p 为极化电荷面密度，则有

$$\sigma_p ds = -(\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \cdot d\vec{s} = -(\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \cdot \hat{n} ds$$

得到

$$\sigma_p = -\hat{n} \cdot (\vec{P}_2 - \vec{P}_1)$$

2、介质的磁化 (magnetization of dielectric)

介质的磁化说明介质对磁场的反映, 介质内部分的电子运动构成微观环形电流, 这种环形电流相当于一个磁偶极子。在没有外磁场时, 这些磁矩取向

是无规则的，不呈现宏观电流效应，一旦在外磁场作用下，环形电流出现有规则取向，形成宏观电流效应，这就是磁化现象。

在电磁学中，引入了磁化强度矢量 \vec{M} ，其定义为单位体积内的磁偶极子数，即

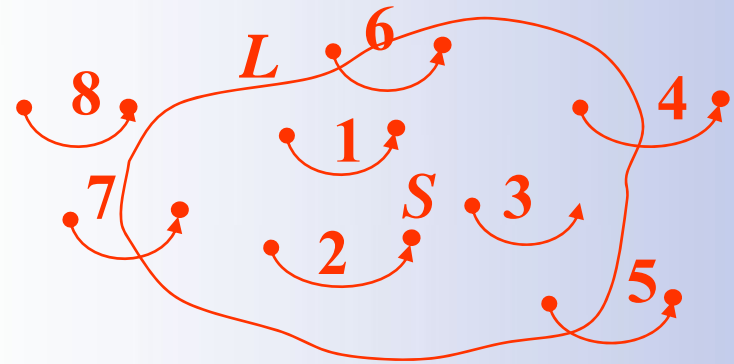
$$\vec{M} = \frac{\sum_i \vec{m}_i}{\Delta\tau}$$

其中 \vec{m}_i 是第 i 个环形电流的磁偶极子，即 $\vec{m}_i = i_i \vec{a}_i$ ， \vec{a}_i 为第 i 个分子环流的面积，求和是对 $\Delta\tau$ 中所有环流进行。

a) 磁化电流密度与磁化强度的关系

由于磁化，引起介质内部环形电流有规则取向，呈现宏观电流效应，这种由磁化引起的电流称为磁化电流。

设 S 为介质内部的一个曲面，其边界线为 L ，环形电流通过 S 面有两种情况：



一种是在 S 面中间通过两次的环形电流，为1、2、3，这种电流环对总电流没有贡献；而另一种是在 S 面中间通过一次的环流，如4、5、7，这种电流环对总电流有贡献，但这种情形只能发生在边界上。当然，在 S 面外的电流环8，对总电流同样无贡献。

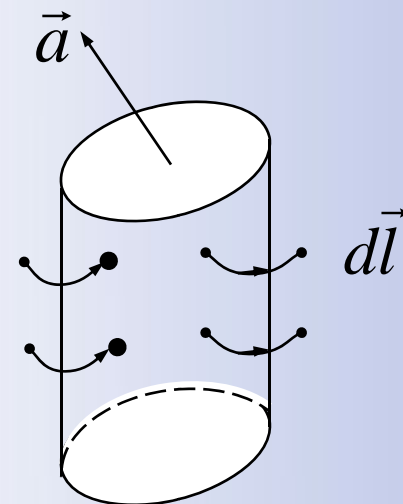
每一个环形电流贡献为 i 或 $-i$ ，在 S 面上一共有多少这种电流呢？

在边界线 L 上取一线元 $d\vec{l}$ ，设环形电流圈的面积为 \vec{a} ，则

由图可见，若分子中心位于体积元 $\vec{a} \cdot d\vec{l}$ 的柱体内，则该环形电流就被 $d\vec{l}$ 所穿过。因此，若单位体积

内分子数为 n ，则被边界线 L 穿过的环形电流数目为

$$\oint_L n \vec{a} \cdot d\vec{l}$$



此数目乘上每个环形电流 i ，即得从 S 背面流向前面的总磁化电流：

$$I_m = \oint_L i n \vec{a} \cdot d\vec{l} = \oint_L \vec{M} \cdot d\vec{l}$$

以 \vec{j}_m 表示磁化电流密度，有

$$\iint_S \vec{j}_m \cdot d\vec{S} = \oint_L \vec{M} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla \times \vec{M}) \cdot d\vec{S}$$

$$\iint_S (\vec{j}_m - \nabla \times \vec{M}) \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\vec{j}_m = \nabla \times \vec{M}$$

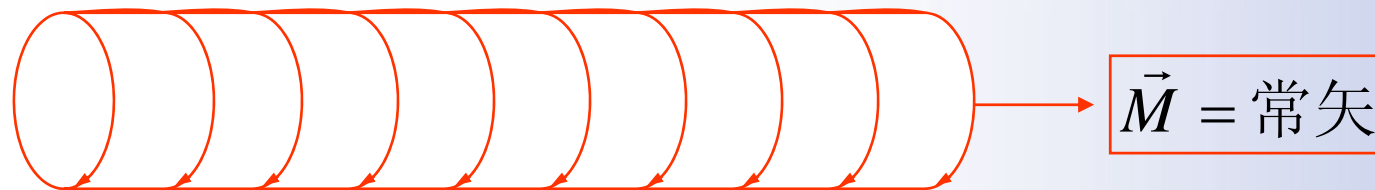
对 \vec{j}_m 两边取散度，得

$$\nabla \cdot \vec{j}_m = 0$$

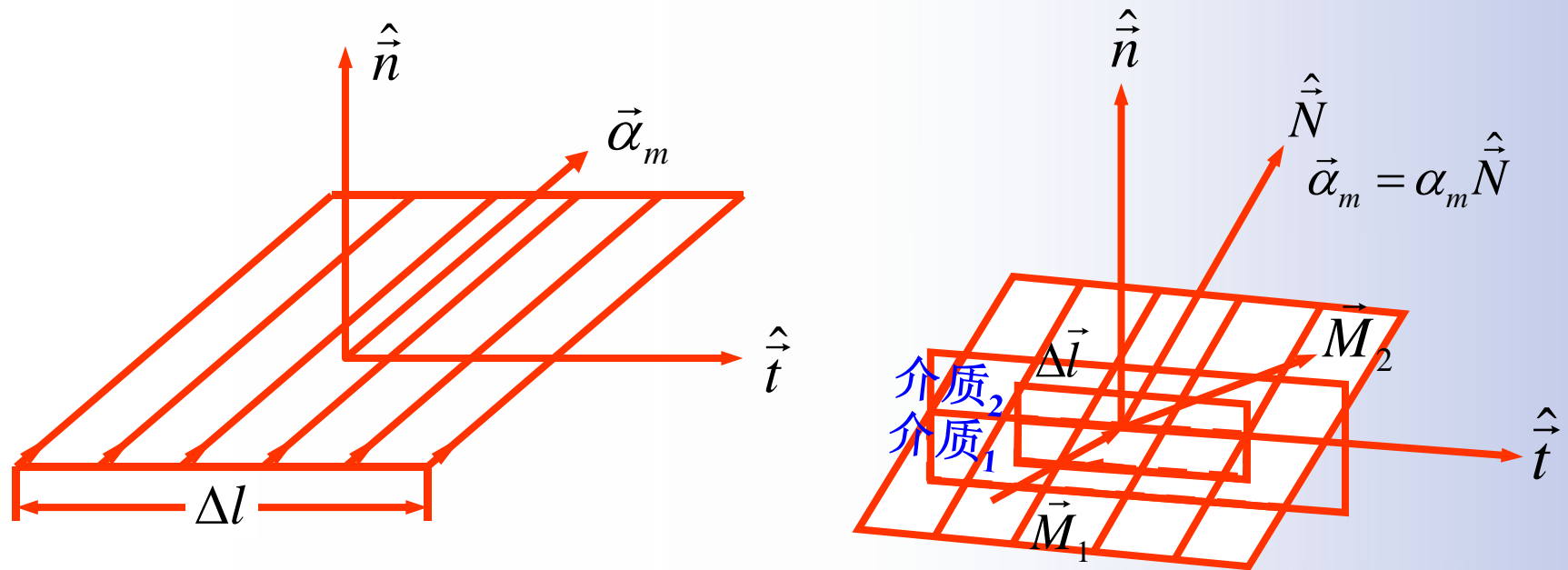
这就说明磁化电流不引起电荷的积累，电流无源头。

b) 磁化电流面密度与磁化强度的关系

对于均匀介质，磁化后介质内部的 \vec{M} 为一常矢量。可见 $\vec{j}_m = \nabla \times \vec{M} = 0$ ，即介质内部 $\vec{j}_m = 0$ 。但表面上却有电流分布。



为此，要引入面电流密度的概念。面电流实际上是靠近表面的相当多分子层内的平均宏观效应，对于薄层厚度趋于零，则通过电流的横截面变为横截线。



现在来看两介质交界面上的磁化电流分布情况。如图所示的回路中，有

$$\oint_L \vec{M} \cdot d\vec{l} = I_m$$

$$\oint_L \vec{M} \cdot d\vec{l} = (\vec{M}_2 - \vec{M}_1) \cdot \Delta l \hat{t}$$

$$I_m = \vec{\alpha}_m \cdot \Delta l \hat{N}$$

$$= \vec{\alpha}_m \cdot \Delta l (\hat{n} \times \hat{t})$$

即
$$\vec{\alpha}_m \cdot (\hat{n} \times \hat{t}) = (\vec{M}_2 - \vec{M}_1) \cdot \hat{t}$$

根据矢量分析

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

则得到

$$\hat{t} \cdot (\vec{\alpha}_m \times \hat{n}) = (\vec{M}_2 - \vec{M}_1) \cdot \hat{t}$$

即

$$\vec{\alpha}_m \times \hat{n} = (\vec{M}_2 - \vec{M}_1)$$

又因为

$$\begin{aligned} \hat{n} \times (\vec{\alpha}_m \times \hat{n}) &= (\hat{n} \cdot \hat{n})\vec{\alpha}_m - \hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{\alpha}_m) \\ &= \vec{\alpha}_m \end{aligned}$$

故得到

$$\vec{\alpha}_m = \hat{n} \times (\vec{M}_2 - \vec{M}_1)$$

3、介质中的方程组 (equations in medium)

由上述讨论可知，介质存在时空间电荷包括自由电荷和极化电荷，即

$$\rho = \rho_f + \rho_p = \rho_f - \nabla \cdot \vec{P}$$

介质中出现的电流有传导电流(自由电流)、极化电流、磁化电流。

即

$$\vec{j} = \vec{j}_f + \vec{j}_p + \vec{j}_m = \vec{j}_f + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \nabla \times \vec{M}$$

因此，在介质存在的情况下，**Maxwell's equations**应修改为：

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_f - \nabla \cdot \vec{P}) \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{j}_f + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \nabla \times \vec{M}) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

若令

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

则得到

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho_f \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

4、电磁性质方程 (electromagnetic property equ's)

宏观Maxwell's equations是包含有 $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}$ 这四个场量。显然在导入量 \vec{E}, \vec{D} 与 \vec{B}, \vec{H} 之间的关系尚未确定之前是无法求出方程组的解。这些关系隐含在

$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ 和 $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$ 之中，一般说来 $\vec{D} = \vec{D}(\vec{E}, \vec{B})$

$\vec{H} = \vec{H}(\vec{E}, \vec{B})$ ，它们的函数关系视各种介质的性质而定，所以必须引入一些关系来反映介质电磁性质，这些关系常称为介质的电磁性质方程。或者称为介质的电磁性质的本构关系。

大多数物质在场强不是很强的情况下，介质对场的反应是线性的。尤其在各向同性的物质内，线性关系写成简单的比例关系：

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \chi \varepsilon_0 \vec{E} , & \vec{D} &= \varepsilon \vec{E} \\ \vec{M} &= \chi_m \vec{H} , & \vec{B} &= \mu \vec{H} \end{aligned}$$

其中 $\chi, \epsilon, \chi_m, \mu$ 都是比例常数，通常分别被称为极化率、介电常数、磁化率和导磁系数(磁导率)。

将电磁性质方程与 \vec{D}, \vec{H} 的定义式比较，有

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r, \quad \epsilon_r = 1 + \chi$$

$$\mu = \mu_0 \mu_r, \quad \mu_r = 1 + \chi_m$$

式中 ϵ_r 称为相对介电常数， μ_r 称为相对导磁系数。

在导电物质中，有

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

σ 称为电导率，因此，电磁性质方程的

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \\ \vec{j} = \sigma \vec{E} \end{cases}$$

应当指出，在高频情况下，由于场变化很快，以致于极化电荷和磁化电流跟不上场的变化，所以极化率和磁化率都将是场变化频率 ω 的函数，即

$\varepsilon = \varepsilon(\omega)$ ， $\mu = \mu(\omega)$ 。其次在铁电和铁磁物质或强场情况下， \vec{P} 与 \vec{E} ， \vec{M} 与 \vec{H} 之间将不再是齐次线性关系。另外，对于各向异性的介质来说，介电常数和导磁系数都是张量，场强和感应场强之间的关系推广为

$$D_i = \varepsilon_{ij} E_j, \quad B_i = \mu_{ij} H_j, \quad i, j = 1, 2, 3$$

对于导电介质来说，有推广的欧姆定律：

$$j_i = \sigma_{ij} E_j$$

因此，要注意电磁性质方程的适用范围。

§ 1.6 电磁场边值关系

Boundary Conditions of Electromagnetic Field

在电动力学中，我们关心的场量 \vec{E} 、 \vec{B} 是一个矢量，要想确定区域 V 中的 \vec{E} 和 \vec{B} ，必须知道 V 中每一点 \vec{E} 、 \vec{B} 的散度和旋度，以及在边界面上的法线分量 E_n 、 B_n 。本节主要是讨论两种不同介质的分界面上 **Maxwell's equations** 的形式，亦即电磁场边值关系。

大家知道，由于在外场作用下，介质分界面上一般出现一层束缚电荷和电流分布，这些电荷、电流的存在又使得界面两侧场量发生跃变，这种场量跃

变是面电荷、面电流激发附加的电磁场产生的，**描述在两介质分界面上，两侧场量与界面上电荷、电流的关系，是本节的主要讨论内容。**

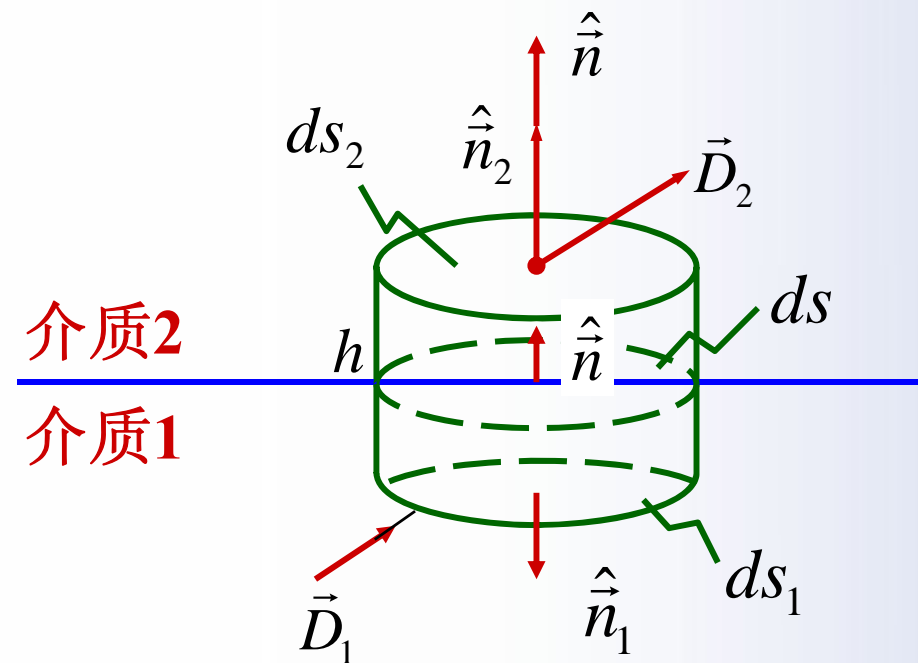
然而，微分形式的**Maxwell's equations**不能应用到两介质的界面上，这是因为**Maxwell's equations**对场量而言，是连续、可微的。只有积分形式的**Maxwell's equations**才能应用到两介质的分界面上，这是因为积分形式的**Maxwell's equations**对任意不连续的场量适合。因此研究边值关系的基础是积分形式的**Maxwell's equations**:

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \\ \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_f + \frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} \\ \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_f \\ \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \end{array} \right.$$

1、法向分量的跃变 (discontinuity of normal component)

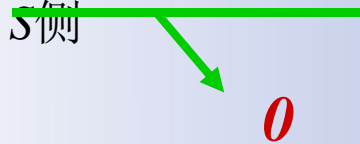
如图所示，在分界面处作一个小扁平匣，匣的上下底面 ds_1 , ds_2 分别位于界面的两侧，且 ds_1 , ds_2 , ds

三个面元平行，大小相等， ds 为界面上被截出的面元，匣的高度 $h \rightarrow 0$ ，用 $\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_f$ 求矢量 \vec{D} 通过匣表面的通量。



由于匣的高度 $h \rightarrow 0$ ，所以通过侧面的 \vec{D} 的通量可以忽略不计，因此

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = \iint_{S_1} \vec{D}_1 \cdot d\vec{s}_1 + \iint_{S_2} \vec{D}_2 \cdot d\vec{s}_2 + \iint_{S_{\text{侧}}} \vec{D} \cdot d\vec{s}_{\text{侧}}$$

$$= (\vec{D}_1 \cdot \hat{n}_1 + \vec{D}_2 \cdot \hat{n}_2) ds$$


由于 $\hat{n}_1 = -\hat{n}$, $\hat{n}_2 = \hat{n}$, 即得

$$(\vec{D}_1 \cdot \hat{n}_1 + \vec{D}_2 \cdot \hat{n}_2) ds = \sigma_f ds$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_f$$

或者

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_f$$

其中 σ_f 是界面上的自由电荷面密度, D_{1n} 及 D_{2n} 分别为

界面两侧的电位移矢量 \vec{D} 在面法线上的分量， \hat{n} 的方向由介质1指向介质2。

根据 $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ 的关系，不难得到

$$\varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n} = \sigma_f$$

讨论: a) 对于两种电介质的分界面 $\sigma_f = 0$ ，则得

$$D_{2n} = D_{1n} \rightarrow \text{连续, 无跃变}$$

$$\frac{E_{2n}}{E_{1n}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \rightarrow \text{不连续, 有跃变}$$

b) 只有导体与介质交界面上，存在 $\sigma_f \neq 0$ 。这时 \vec{D} 、 \vec{E} 在法线上都不连续，有跃变。

c) 对于磁场 \vec{B} ，把 $\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$ 应用到边界上的扁平匣区域上，同理得到^S

$$\hat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$$

即 $B_{2n} = B_{1n} \rightarrow$ 连续, 无跃变

由于 $\vec{B} = \mu\vec{H}$ ，不难找到:

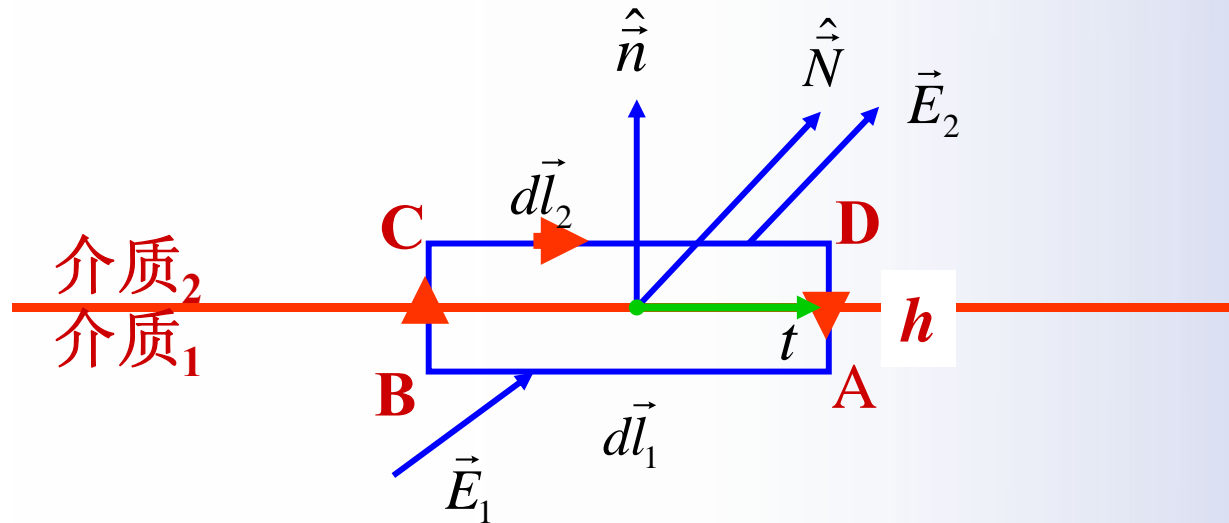
$$\mu_2 H_{2n} = \mu_1 H_{1n}$$

$$\frac{H_{2n}}{H_{1n}} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \rightarrow \text{不连续, 有跃变}$$

这就说明：在分界面上， \vec{B} 的法线分量是连续的， \vec{H} 的法线分量是不连续的，除非 $\mu_1 = \mu_2$ 。

2、切向分量的跃变 (discontinuity of tangential component)

平行边界作一小扁回路，并令此回路与分界面正交且其长边与界面平行。由于回路短边 $h \rightarrow 0$ ，所以 \vec{E} 对回路的环流为：



$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \vec{E}_1 \cdot \Delta\vec{l}_1 + \vec{E}_2 \cdot \Delta\vec{l}_2$$

$$= (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \hat{t} \Delta l$$

而

$$-\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{N} \Delta l h$$

故得

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \hat{t} \Delta l = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{N} \Delta l h$$

可见

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \hat{t} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{N} h$$

这里 $\hat{t} = \hat{N} \times \hat{n}$ ，则

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot (\hat{N} \times \hat{n}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{N}h$$

根据矢量分析:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

$$\hat{N} \cdot \left[\hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \right] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{N}h$$

即

$$\hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} h$$

由于 $h \rightarrow 0$, 而 $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 为有限值, 故得到

$$\hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$$

亦即 $E_{2t} = E_{1t}$. \rightarrow 连续, 无跃变.

但根据 $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, 有

$$\varepsilon_1 D_{2t} = \varepsilon_2 D_{1t}$$

$$\frac{D_{2t}}{D_{1t}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \rightarrow \text{不连续, 有跃变.}$$

这说明: 在分界面上, \vec{E} 的切线分量是连续的, \vec{D} 切线分量不连续。

对于磁场 \vec{H} , 则根据 $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_f + \frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{l}\vec{s}$

则

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \vec{H}_1 \cdot \hat{t}_1 \Delta l + \vec{H}_2 \cdot \hat{t}_2 \Delta l = (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \cdot \hat{t} \Delta l$$

而 $I_f = j_f S = j_f h \Delta l = \alpha_f \Delta l$

$$\frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{s} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \Delta l h \hat{N}$$

由于 $S \rightarrow \mathbf{0}$, 而 $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ 为有限值, 则

$$\frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = 0$$

所以 $(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \cdot \hat{t} \Delta l = \alpha_f \Delta l$

即 $(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \cdot \hat{t} = \alpha_f$

或者 $H_{2t} - H_{1t} = \alpha_f$

又由于 $\Delta \vec{l} = \Delta l \hat{t}$ 为界面上的任一矢量，因此

$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \cdot \hat{t} = (\vec{\alpha}_f \times \hat{n}) \cdot \hat{t}$$

$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{\alpha}_f \times \hat{n}$$

因为 $\hat{n} \times (\vec{\alpha}_f \times \hat{n}) = (\hat{n} \cdot \hat{n})\vec{\alpha}_f - (\hat{n} \cdot \vec{\alpha}_f)\hat{n} = \vec{\alpha}_f$

故得

$$\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{\alpha}_f$$

导体存在时，表面上的 $\vec{\alpha}_f$ 才不为零。通常介质界面上 \vec{H} 矢量的切向分量是连续的。

综上所述，电磁场的边值关系为

$$\begin{cases} \hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \\ \hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{\alpha}_f \\ \hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_f \\ \hat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \end{cases}$$

由此可见，边值关系表示界面两侧的场与界面上电荷之间的制约关系，实质上，边值关系是边界上的场方程。由于实际问题往往含有几种介质以及导体等，因此，边值关系是十分重要的。

1.6节主要内容回顾

1. 电极化

极化电荷密度与极化强度之间关系

$$\int_V \rho_p d\tau = -\oiint_S \vec{P} \cdot d\vec{s} \quad \text{积分形式}$$

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} \quad \text{微分形式}$$

极化电流密度与极化强度之间关系

$$\vec{j}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad \text{根据电荷守恒定律推导得}$$

极化电荷面密度与极化强度之间关系

$$\int \sigma_p ds = \int -(\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \cdot d\vec{s} \quad \underline{\text{整体}}$$

$$\sigma_p = -\hat{n} \cdot (\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \quad \underline{\text{微观}}$$

2. 磁磁化

磁化电流密度与磁化强度之间关系

$$\iint_S \vec{j}_m \cdot d\vec{S} = \oint_L \vec{M} \cdot d\vec{l} \quad \underline{\text{积分形式}}$$

$$\vec{j}_m = \nabla \times \vec{M} \quad \underline{\text{微分形式}}$$

磁化电流面密度与磁化强度之间关系

$$\oint_L \vec{M} \cdot d\vec{l} = I_m \quad \text{整体}$$

$$\vec{\alpha}_m = \hat{n} \times (\vec{M}_2 - \vec{M}_1) \quad \text{微观}$$

3. 介质中电荷、电流

电磁场中的介质中电荷密度和电流密度

$$\rho = \rho_f + \underline{\rho_p} = \rho_f - \underline{\nabla \cdot \vec{P}}$$

$$\vec{j} = \vec{j}_f + \underline{\vec{j}_p} + \underline{\vec{j}_m} = \vec{j}_f + \underline{\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}} + \underline{\nabla \times \vec{M}}$$

4. 介质中 Maxwell's Equations

与真空中 Maxwell's Equations 相比较,用介质中电荷密度、电流密度将真空中的电流密度与电荷密度代替即可。

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_f - \nabla \cdot \vec{P}) \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{j}_f + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \nabla \times \vec{M}) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

5. 介质中电磁性

介质的电磁性质方程

$$\begin{cases} \vec{D} = \epsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \\ \vec{j} = \sigma \vec{E} \end{cases}$$

介质中Maxwell's Equations可简化为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho_f \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

§ 1.7 电磁场的能量和能流

Energy and Energy Flow of Electromagnetic Field

电磁场是一种物质，它具有内部运动。电磁场的运动和其他物质运动形式相比有它的特殊性一面，但同时也有普遍性的一面。即电磁场运动和其他物质运动形式之间能够互相转化。

本节先用电磁场运动的基本规律——Maxwell's equations 和 Lorentz 力密度公式 讨论电磁现象中能量转换和守恒定律的表现形式，从而求出电磁场能量和能流。

1、电磁场的能量守恒和转化定律

Law of Conservation and Transform of Energy of Electromagnetic Field

我们讨论电磁场能量问题，是以功和能的关系、能量守恒原理和代表电磁现象普遍规律的Maxwell's equations 和 Lorentz力密度公式为依据的。求电磁场的能量，是通过电磁场和带电物体相互作用过程中，电磁场的能量和带电物体运动的机械能相互转化来进行的。为此，我们研究运动的带电物体受电磁场的作用而引起的总机械能量的变化。

假设有一带电体，其电荷体密度为 ρ ，在电磁场作用下运动。由于磁场作用在运动带电物体上的力总与带电物体位移的方向垂直，磁场对带电体不作功。所以只需求电场对带电体所做的功即可。

在 dt 时间内，体积元 $d\tau$ 中的电荷 $\rho d\tau$ 发生的位移为 $d\vec{l} = \vec{v} dt$ ， \vec{v} 为带电物体体积元 $d\tau$ 的运动速度。于是电磁场对 $\rho d\tau$ 所做的功，根据Lorentz力密度公式，即

$$\begin{aligned}dW &= \vec{F} \cdot d\vec{l} \\&= \rho d\tau (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} dt \\&= \rho d\tau \vec{E} \cdot \vec{v} dt \\&= \vec{j} \cdot \vec{E} dt d\tau\end{aligned}$$

其中因为 $(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0$ 。因此在 dt 时间内，电磁场对整个空间中传导电流（运动带电物体）所作的功为：

$$W = \int_V \vec{E} \cdot \vec{j} d\tau dt$$

电磁场对带电物体做功增加了带电物体的机械能 $U_{\text{机}}$ ，故

$$\frac{dU_{\text{机}}}{dt} = \int_V \vec{E} \cdot \vec{j} d\tau$$

现将式中的 \vec{j} 用场量表示，根据 Maxwell's equations，可知

推导

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \vec{j} = \nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

从而有

$$\vec{E} \cdot \vec{j} = \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

考虑对称性，因为 $\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ ，故

$$\vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

将此两式相减，从而得到

$$\begin{aligned} \vec{E} \cdot \vec{j} &= \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ &= \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) - \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned}$$

利用矢量场论公式

$$\nabla \cdot (\vec{f} \times \vec{g}) = \vec{g} \cdot (\nabla \times \vec{f}) - \vec{f} \cdot (\nabla \times \vec{g})$$

于是上式右边的第一、二项为

$$\vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) - \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) = -\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H})$$

上式右边第三、四项为

$$\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} w$$

从而得到

$$\vec{E} \cdot \vec{j} = -\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) - \frac{\partial w}{\partial t}$$

令

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$
$$w = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B})$$

其中 $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$

故得

$$\vec{E} \cdot \vec{j} = -\nabla \cdot \vec{S} - \frac{\partial}{\partial t} w$$

从而得到

$$\frac{dU_{\text{机}}}{dt} = \int_V \left[-\nabla \cdot \vec{S} - \frac{\partial}{\partial t} w \right] d\tau$$
$$= -\oiint_S \vec{S} \cdot d\vec{s} - \frac{d}{dt} \int_V w d\tau$$

现在来看上式每一项的物理意义：

当积分区域为整个空间时，面积 S 在无穷远处，由于电荷，电流都集中在有限区域，所以在无穷远处电磁场皆为零，故上式面积分项为零，于是得到

$$\frac{dU_{\text{机}}}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_{\infty \text{全空间}} w d\tau$$

这表明，带电体的机械能 $U_{\text{机}}$ 的增加值等于 $\int_{\infty} w d\tau$ 的减少值，如果令

$$U_{\text{电磁}} = \int_{\infty} w d\tau$$

则 w 为电磁能量密度，即有

$$\frac{d}{dt}(U_{\text{机}} + U_{\text{电磁}}) = 0$$

得

$$U_{\text{机}} + U_{\text{电磁}} = \text{常数}$$

该式说明：体系的机械能不守恒，电磁能也不守恒，而两者之和才是一个守恒量。带电体和电磁场互相交换能量，它表示的是电磁场和带电体系的能量独立和转化定律。

2、电磁场的能流密度

Energy Flux Density of Electromagnetic Field

当我们只考虑关系式

$$\frac{dU_{\text{机}}}{dt} = -\oiint_S \vec{S} \cdot d\vec{s} - \frac{d}{dt} \int_V w d\tau$$

中积分区域为某局部区域时，则 V 为有限空间。它的包面 S 也就不在无穷远处， S 上的电磁场皆不为零，所以

$$\frac{dU_{\text{机}}}{dt} + \frac{d}{dt} \int_V w d\tau = -\oiint_S \vec{S} \cdot d\vec{s}$$

左为第一项 $\frac{dU_{\text{机}}}{dt}$ 表示体积 V 内带电体的机械能的增加，

左边第二项 $-\frac{d}{dt} \int_V w d\tau$ 代表体积 V 内的电磁场能量的

减少，因此右边的项也必然代表能量的意义。由于

它是面积分，所以我们把它解释为单位时间内从体积 V 的表面流进体积 V 中的电磁场能量。因此把

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

称为电磁场能流密度矢量，也叫玻印亭矢量，即 (Poynting 矢量)。

通常把

$$\frac{dU_{\text{机}}}{dt} = -\oiint_S \vec{S} \cdot d\vec{s} - \frac{d}{dt} \int_V w d\tau$$

称为**Poynting定理**

由上述可以看到， \vec{S} 与 w 这两个量的存在，说明了电磁场不仅有能量而且此能量还在流动，在空间中传播。

3、电磁场能量的传播

Propagation of energy of electromagnetic field

以往，只注重解电路方程而忽视了电磁能量在场中的传播的实质。事实上，在稳恒电流或低频交流

电的情况下，电磁能量也是在场中传播的。在电路中，物理系统的能量包括导线内部电子运动的动能和导线周围空间中的电磁场能量。

先看电子运动的动能。导线内的电流密度为

$$\vec{J} = \sum e \vec{v} = ne \vec{v}$$

一般金属导体内有 $n \sim 10^{23}/\text{cm}^3$ ，对 $1\text{A}/\text{mm}^2$ 的电流密度来说，且 $J = 10^6 \text{A}/\text{m}^2$ ，电子电荷 $e \sim 1.6 \times 10^{-9} \text{c}$ ，得到电子运动平均漂移速度 $\bar{v} \sim 6 \times 10^{-5} \text{m/s}$ ，由此可见，电子运动速度之小，相应地动能也很小。因此电子运动的能量决不是供给负载上消耗的能量。

再看电磁场能量。我们知道，电磁场是以光速传播的，电磁能流是经由传输线附近的空间以光速流向用户，传输线的作用是在电磁场的作用下产生较强的电流和电荷分布，从而使传输线附近的空间形成较强的电磁场和电磁能流的通道。能量不是经由导线内的电子传送的，这一点完全可以由这一事实来回答：在有限距离里，当闸刀一合上，所有的用电器同时通以电流。

电磁场在传输过程中，一部分能量进入导线内部变为焦耳热损耗。在负载上，能量流入电阻并被消耗。

本节主要内容回顾

能量守恒定律

$$\frac{dU_{\text{机}}}{dt} = -\oiint_S \vec{S} \cdot d\vec{s} - \frac{d}{dt} \int_V w d\tau$$

能量密度和能流密度

$$w = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B})$$

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

§ 1.8 麦克斯韦方程组的自治性和完备性

Self-Consistence and Completeness of Maxwell's Equations

Maxwell's equations作为讨论电磁场理论的出发点，它描述了电磁场这种物质运动形态的运动、变化的根本规律。现在，我们必须要知道，作为一组联立的方程，它们之间有无内在矛盾？在场的初始条件和边界条件下，这组方程的解答是否唯一可靠？

1、麦克斯韦方程组的自洽性

Self-consistence of Maxwell 's Equations

所谓自洽性，就是要求从不同角度出发导出的四个方程彼此之间不相互矛盾。

根据Maxwell 's equations，将方程式

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

两边取散度，得到

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{B}$$

因左边要求为零，故

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

即 $\nabla \cdot \vec{B} = \text{const}$ (常数)

若与 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ 比较，可见它仅系前者的一个特例，因而不矛盾。

另外，对方程式

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

两边取散度，得到

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{D}$$

左边要求为零，即

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{D} = 0$$

根据电荷守恒定律，则

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

故有

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{D} = \frac{\partial}{\partial t} \rho$$

即

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{D} - \rho) = 0$$

故得到 $\nabla \cdot \vec{D} - \rho = \text{const}(\text{常数})$

若与 $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ 比较，前者也是后者的一个特例。因而不矛盾。这就证明了 **Maxwell's equations** 是自洽的。

2、麦克斯韦方程组的完备性

Completeness of Maxwell's Equations

所谓**完备性**，就是说在给定电荷电流分布的条件下，如果初始条件和边界条件都已确定，那么 **Maxwell's equations** 的解是唯一的，亦即为了找出唯一解不需要再引入任何附加条件。

Maxwell's equations 的完备性，亦称 **Maxwell's equations** 解的唯一性原理。

这里采用反证法来证明:

设在给定的初始条件和边界条件下, 方程组存在两组不等价的解, 分别记为 \vec{E}_1 、 \vec{B}_1 和 \vec{E}_2 、 \vec{B}_2 。那么

$$\vec{E} = \vec{E}_1 - \vec{E}_2, \quad \vec{B} = \vec{B}_1 - \vec{B}_2$$

显然, 两组解都满足同一体系的 **Maxwell's equations**,

即

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E}_1 = \rho / \epsilon_0 \\ \nabla \times \vec{E}_1 = -\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B}_1 = 0 \\ \nabla \times \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E}_2 = \rho / \epsilon_0 \\ \nabla \times \vec{E}_2 = -\frac{\partial \vec{B}_2}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B}_2 = 0 \\ \nabla \times \vec{B}_2 = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_2}{\partial t} \end{array} \right.$$

因为是同一体系，两组方程中的场源 ρ, \vec{j} 是相同的，不仅如此，两组方程的解都满足同样的初始条件和边界条件。即

$t=0$ 时：

$$\vec{E}_1(\vec{x}, 0) = \vec{E}_2(\vec{x}, 0)$$

$$\vec{B}_1(\vec{x}, 0) = \vec{B}_2(\vec{x}, 0)$$

在边界面上：

$$\vec{E}_1|_S = \vec{E}_2|_S, \quad \vec{B}_1|_S = \vec{B}_2|_S$$

把两组方程相减，得到

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

对应新的方程组的初始条件和边界条件，直接得到

$$\text{在 } t=0 \text{ 时; } \quad \vec{E}(\vec{x},0) = \vec{B}(\vec{x},0) = 0$$

$$\text{在边界面上: } \quad \vec{E}|_S = \vec{B}|_S = 0$$

因此， \vec{E} 和 \vec{B} 对应的电磁体系是无源、无初始扰动、边界上值恒为零的体系。

根据玻印亭定理，我们得到

$$\int_V \vec{E} \cdot \vec{j} d\tau = -\oiint_S \vec{S} \cdot d\vec{s} - \frac{d}{dt} \int_V w d\tau$$

根据新的方程组和边界条件，则可见(对于真空情况)

$$\vec{j} = 0, \quad \text{及} \quad \frac{1}{\mu_0} \oiint_S (\vec{E} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} = 0$$

从而得到

$$-\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} (\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2) d\tau = 0$$

故

$$\int_V \frac{1}{2} (\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2) d\tau = \text{const}(\text{常数})$$

由于初始条件 $t=0$ 时, $\vec{E} = \vec{B} = 0$, 所以上式中的常数为零。即

$$\int_V \frac{1}{2} (\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2) d\tau = 0$$

由于被积函数是恒正的, 要使上式成立, 只能是

$$E^2 = 0, \quad B^2 = 0$$

即

$$\vec{E}_1(\vec{x}, t) = \vec{E}_2(\vec{x}, t)$$

$$\vec{B}_1(\vec{x}, t) = \vec{B}_2(\vec{x}, t)$$

可见所设的两组解是同解。这样，我们就证明了
Maxwell's equations解的唯一性，亦即完备性得证。

本章主要内容

二、几个基本定律

1、电荷守恒定律

$$\oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho d\tau$$

积分

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

微分

2、库仑定律

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_1} \int_{V_2} \frac{\rho_1 \rho_2}{r^3} \vec{r} d\tau_1 d\tau_2$$

3、安培定律

$$\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times (I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{21})}{r_{21}^3}$$

4、毕奥——萨伐尔定律

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_L \frac{I' d\vec{l}' \times \vec{r}}{r^3}$$

5、法拉第定律

$$\oint_L \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

6、洛仑兹力

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

整体

$$\vec{f} = \rho(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

微观

二、麦克斯韦方程组

1、真空中静电场

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho d\tau$$

积分

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{x})$$

微分

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{x}) = 0$$

微分

2、真空中静磁场

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{x}) = 0$$

微分

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{x}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{x})$$

微分

3、真空中麦克斯韦方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

微分

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \\
 \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I \\
 \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dv = \frac{Q}{\epsilon_0} \\
 \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0
 \end{array} \right.$$

积分

4、介质中麦克斯韦方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{D} = \rho_f \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right.$$

微分

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \\ \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_f + \frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} \\ \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_f \\ \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \end{array} \right.$$

积分

5、边界麦克斯韦方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \\ \hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{\alpha}_f \\ \hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_f \\ \hat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \end{array} \right.$$

三、几个关系式和物理量

1、介质中电磁性方程

$$\begin{cases} \vec{D} = \epsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \\ \vec{j} = \sigma \vec{E} \end{cases}$$

2、能量密度和能流密度

$$w = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B})$$

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$