第一章 电磁现象的普遍规律

Universal Law of Electromagnetic Phenomenon

本章将从基本的电磁实验定律出发建立真空中的**Maxwell’s equations**。并从微观角度论证了存在介质时的**Maxwell’s equations** 的形式及其电磁性质的本构关系。继而给出**Maxwell’s equations**在边界上的形式，及其电磁场的能量和能流，最后讨论**Maxwell’s equations**的自洽性和完备性。

本章主要内容

电荷守恒定律

电荷与电场

电流和磁场

麦克斯韦方程组

介质的电磁性质

电磁场边值关系

电磁场的能量和能流

麦克斯韦方程组的自洽性和完备性

§1.1　电荷守恒定律

The Conservation Law of Charge

电荷不会产生也不会消失.

-------------电荷守恒定律

1. 电荷密度(Charge Density)

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V}$$ 电荷连续分布带电体

$$\rho = \sum_i q_i \delta(x - x_i)$$ 点电荷分布带电体

面电荷密度 $$\sigma = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta s}$$

线电荷密度 $$\lambda = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta l}$$

2 电流密度（Current density)

电荷的运动形成电流，通常用$\vec{j}$来描述，其定义为

$$\vec{j} = \rho \vec{v}$$

$\vec{v}$代表电荷密度ρ的运动速度。

3 电流强度(Current intensity)

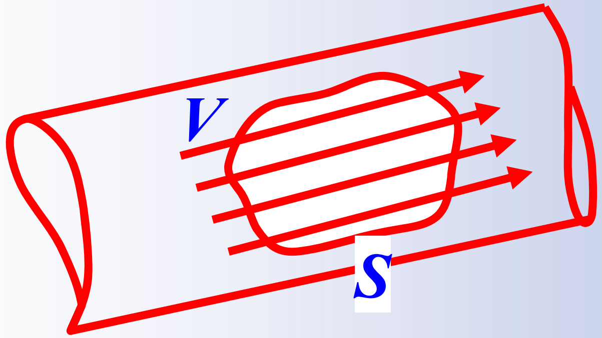
单位时间内垂直穿过导线横截面的电量称为电流强度，用***I***表示，显然***I***与$\vec{j}$的关系为

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{s}$$

3. 电荷守恒 (Conservation of Charge)

对于封闭系统，总电荷保持不变。实验表明电荷是守恒的。即一处电荷增加了，另一处的电荷必然减少，而且增加和减少的量值相等。

若在通有电流的导体内部，任意找出一个小体积 ***V***，包围这个体积的闭合曲面为 ***S***，并且假定电流的体积 ***V*** 的一面流入，从另一面流出。



单位时间内穿过S曲面流出去的电量为

$$Q = \oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{s}$$

而流出去的电量应该等于封闭曲面S内总电荷在单位时间内的减少量，即

$$-\frac{d}{dt}\int_V \rho d\tau$$

所以

$$\boxed{\oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho d\tau}$$

根据**Gauss' theorem**，有

$$\oiint_S \vec{j}\cdot d\vec{s} = \int_V \nabla\cdot\vec{j}\,d\tau$$

若所选取的封闭曲面***S***不随时间变化，则

$$\int_V \left(\nabla\cdot\vec{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)d\tau = 0$$

由于曲面***S***是任意选取的，所以被积函数恒为零，即

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0}$$

这就是电荷守恒定律的数学表达式,也称连续性方程。

注意:

a) 在稳定电流的情况下，由于$\frac{\partial \rho}{\partial t}=0$ ，所以

$$\nabla \cdot \vec{j}=0$$

这表示稳定电流线是闭合的。

b) 对于全空间***V***，***S***为无穷远界面，由于***S***面上没有电流流出，即 $\oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{s} = 0$，从而得到

$$-\frac{d}{dt}\int_V \rho d\tau = 0$$

表示全空间的总电荷守恒。

§1.2　电荷与电场

Electric Charge and Electric Field

库仑定律

叠加原理

电场

高斯定理

电场的散度

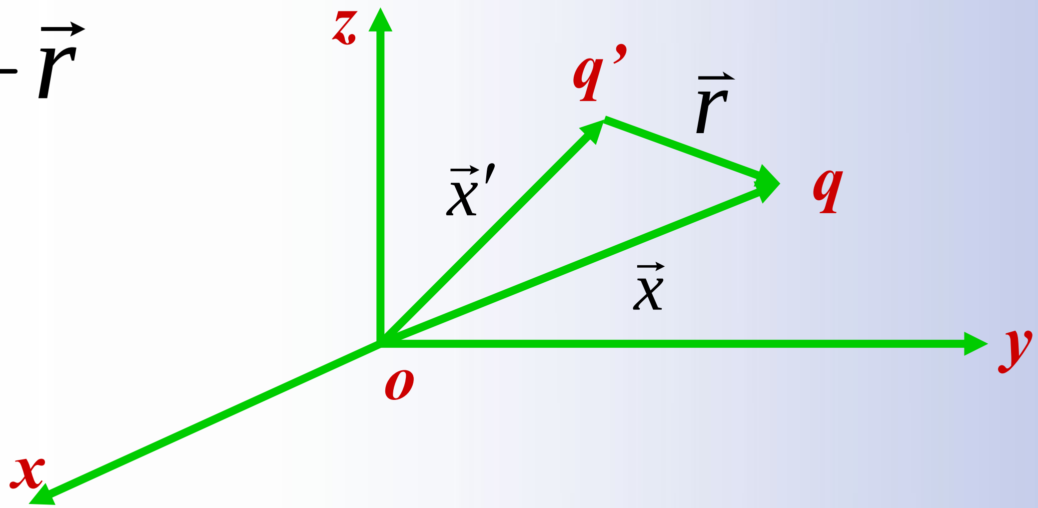
电场的旋度

1. 库仑定律（Coulomb’s law）

Coulomb’s law是描写真空中两个静止的点电荷q'和q之间相互作用力的定律。其数学表达式为

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^3}\vec{r}$$

$$\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}'$$



式中$\vec{r}=\vec{x}-\vec{x}'$表示q'到q的矢径，$\vec{F}$表示电荷q受到q'的作用力。同理，q'受到q的作用力$\vec{F}'$是：

$$\vec{F}'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'q}{r^3}\vec{r}'=-\vec{F}$$

这里的$\vec{r}'=-\vec{r}$

Coulomb's law是大家熟知的，在这里要着重指出的是：该定律在电磁学发展史上占有重要的地位，它的发现使人们对电现象由定性的研究过渡到定量的研究，这是电学研究的转折点，特别是它的平方反比律性质，是**Gauss theorem**的基础。现代物理实验证明，如果把库仑力写成正比于 $r^{-(2+\varepsilon)}$，则 ε的值（极限）为（2.7±3.1）×10^{-16}。在整个经典物理领域乃至量子领域里，平方反比律都成立。

2、叠加原理（principle of superposition)

Coulomb's law所说明的只是空间存在的两个点电荷之间的相互作用。实际上，往往同时存在多个电荷，这时任意两个电荷之间的相互作用的规律是什么呢？每个电荷受到多大的作用力呢？总结了许多实验以后,人们发现:

若空间存在n个电荷$q_1, q_2 \cdots q_n$，这时任意一个电荷q_j,受到其它所有电荷对它的作用力为

$$\vec{F}_j = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_j q_i}{r_{ji}^3}\vec{r}_{ji}$$

此式称为线性叠加原理。

原理是假设性的，它并不能从理论本身中产生，其可靠性由实验来检验。迄今为止，在经典范围内和我们可以达到的场强下还没有找到一个反例显示出线性叠加原理的失效。

实际上电荷分布是不连续的，因为电荷是量子化的，任何物体所带的电荷总是电子电荷的整数倍。但在考查物体的宏观性质时能观察到的总是大量微观粒子的平均效应，因此常用到电荷连续分布的概念来代替电荷的分立性。

定义体电荷密度为

$$\rho = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta \tau} = \frac{dQ}{d\tau}$$

其中dQ是这空间任一体积元$d\tau$中所逞的电量。因此，一个点电荷q受到一个电荷连续分布的带电体的作用力为

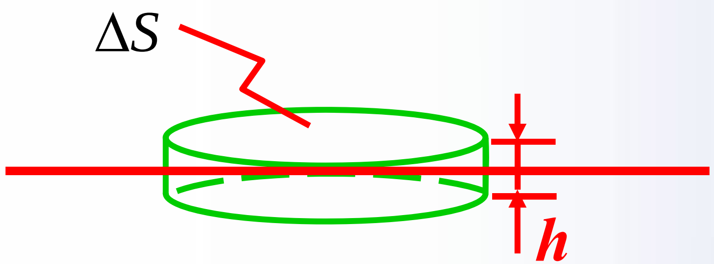
$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{q\rho}{r^3} \vec{r} d\tau$$

式中 $\vec{r}$ 是$d\tau$指向q的位置矢量。

显然，两个电荷连续分布的带电体之间的相互作用力为

$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{V_1}\int_{V_2} \frac{\rho_1\rho_2}{r^3} \vec{r} d\tau_1 d\tau_2}$$

虽然电荷的真实分布是体电荷分布，但在实际中会碰到电荷集中分布在靠近物体表面的一个薄层内，此时常引入面电荷密度来描述这种电荷分布。



若电荷分布在表面薄层h内，用ΔS代表表面上的任一小面积元，则体积元$h\Delta S$内的电量为

$$\Delta Q = h\rho\Delta S$$

定义面电荷密度为

$$\sigma = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta S} = \frac{dQ}{dS} = h\rho$$

3、电场（electric field）

由**Coulomb’s law**得知，在一个给定电荷分布的空间内某一点放置一个点电荷q，此点电荷所受的力由两个因素决定：一是点电荷本身的位置及其电量的大小；二是给定电荷的分布和电量的大小。由于放置点电荷q将会直接影响给定电荷的分布，因此为了使问题简单，我们在讨论放置电荷q的运动时，常把其余电荷看作保持原先的分布，即其余电荷的的相对位置都是固定不变的。于是，作用在电荷q上的力仅与该电荷的电量q 及其位置有关，即

$$\vec{F} = q\vec{E}(\vec{x})$$

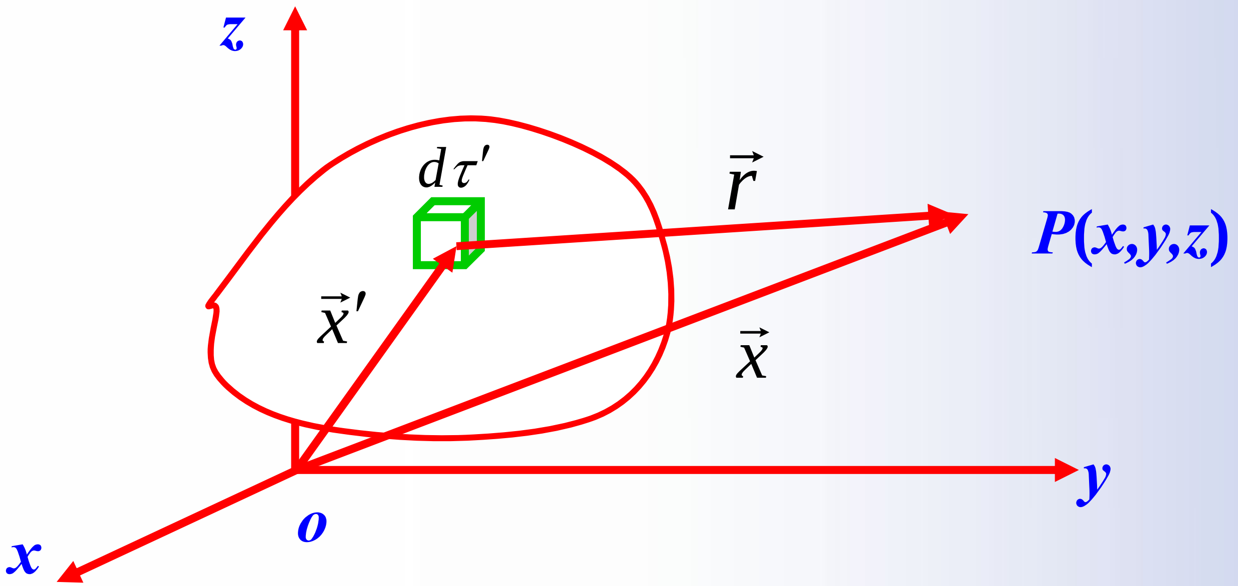
式中 $\vec{x}$ 是点电荷q 所在的位置矢量，$\vec{F}(\vec{x})$ 是点 $\vec{x}$ 的某一矢量函数，与**Coulomb’s law**比较，可以看出

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i(\vec{x}-\vec{x}_i')}{|\vec{x}-\vec{x}_i'|^3}$$

或者

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{x}')(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}d\tau'$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{x}')}{r^3}\hat{\vec{r}}d\tau'$$



式中 $\vec{x}$ 是场点P的位置矢量，$\vec{x}'$ 是源点 $\rho(\vec{x}')d\tau'$ 的位置矢量，$\vec{r}=\vec{x}-\vec{x}'$

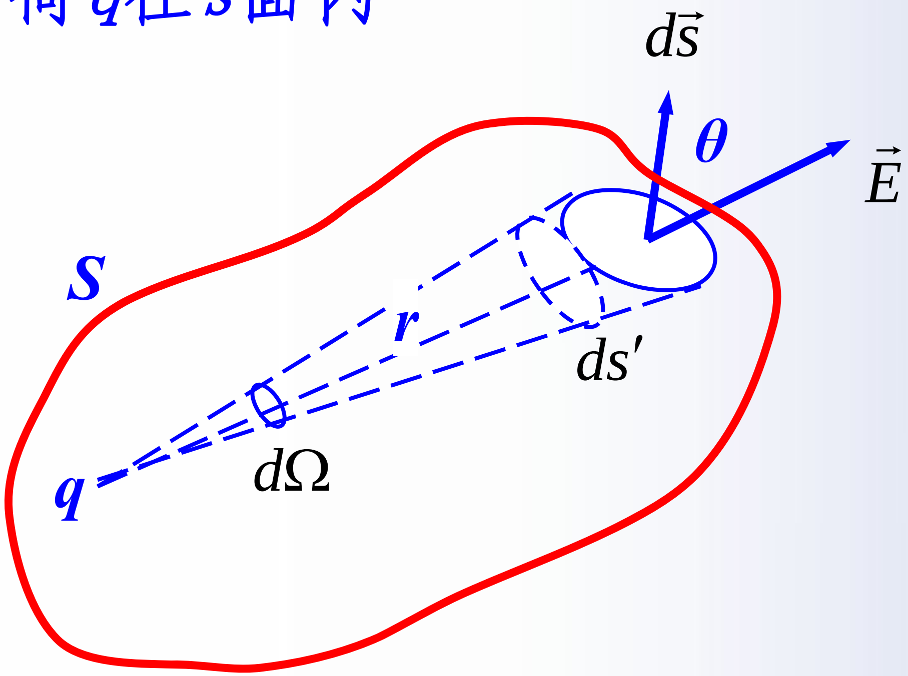
要讨论点电荷q的运动就要知道它所受到的作用力。求作用力可归结为求函数 $\vec{E}(\vec{x})$，而它决定于空间除q以外其余电荷的分布，这个函数就称为电场强度。

4、高斯定理（Gauss' theorem）

现在，具体分析一下电荷分布产生的电场 $\vec{E}(\vec{x})$ 的一般性质。所谓电场其实是带电体周围的一个特殊空间，特殊性表现在：当我们在这个空间放入一个点电荷时，该电荷会受到作用力。

Gauss' theorem主要是讨论电场强度$\vec{E}(\vec{x})$的面积分，在点电荷场中，设s表示包围着点电荷q的一个闭合面，$d\vec{s}$为s上的定向面元，以外法线方向为正。

a） 如果点电荷q在s面内

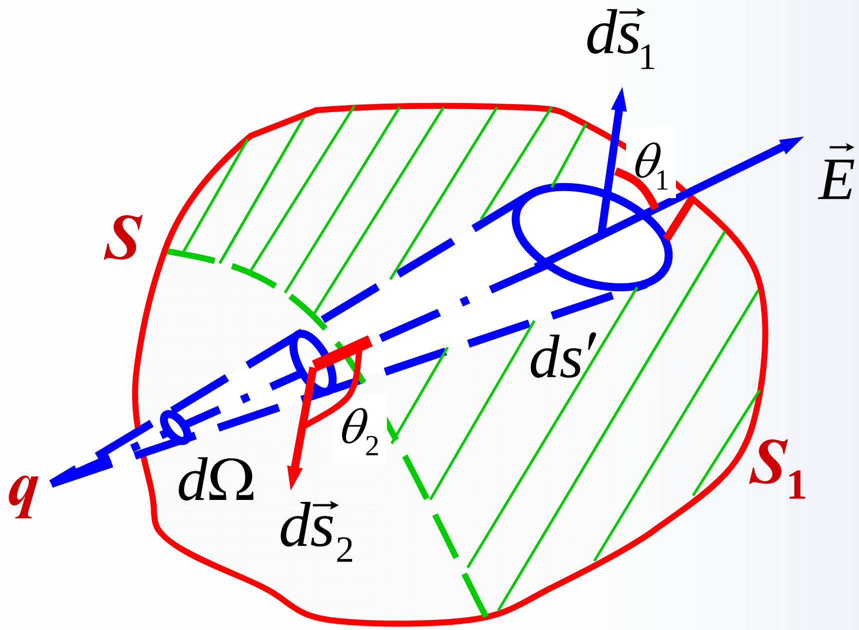


对于空间任一封闭曲面S作$\vec{E}$的面积分，可得

推导

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint\!\!\!\oint_S d\Omega = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

b) 如果点电荷q在S面外，把S面分成两部分，照明部分S_2和阴影部分S_1, 则



推导

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\iint_{S_2} d\Omega + \iint_{S_1} d\Omega\right] = 0$$

由此可得到结论:

$$\boxed{\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \begin{cases} q/\varepsilon_0 & q\text{在}S\text{面内} \\ 0 & q\text{在}S\text{面外} \end{cases}}$$

根据叠加原理，在点电荷系场中，则存在着如下形式:

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iint_S (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_k + \cdots + \vec{E}_n)\cdot d\vec{s}$$

设 $q_1, q_2, \cdots q_k$ 在 S 内， $q_{k+1}, q_{k+2}, \cdots q_n$ 在 S 外，则有

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{k} q_i = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

S面内

对于连续分布的电荷体系来说，则有

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho d\tau$$

5、静电场的散度（divergence of electrostatic field)

方法一:

已知 $$\oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho d\tau$$ 根据**Gauss**公式:

$$\oint\!\!\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{s} = \int_V \nabla\cdot\vec{A}d\tau$$

得到 $$\oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_V \nabla\cdot\vec{E}d\tau$$

将此与**Gauss**定理比较，得到

$$\boxed{\int_V \nabla\cdot\vec{E}d\tau = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho d\tau}$$

即有
$$\int_V (\nabla \cdot \vec{E} - \frac{1}{\varepsilon_0}\rho) d\tau = 0$$

故
$$\nabla \cdot \vec{E} - \frac{1}{\varepsilon_0}\rho = 0$$

从而得到
$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

严格说来:
$$\boxed{\nabla \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{x})}$$

方法二:

已知 $\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{x}')\vec{r}}{r^3} d\tau'$，对该式两边作用

$\nabla\cdot$，即

推导

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{x})}$$

讨论:

a）空间任一点 $\vec{E}(\vec{x})$ 的散度仅仅决定于该点的电荷密度，而 $\nabla\cdot\vec{E}(\vec{x})$ 描述场源的性质（有检源作用）。

b） **Gauss' theorem**是由**Coulomb's law**导出的，它是一个有限范围，而**Gauss' theorem**是一个宏观无限小 $(\Delta\tau \to 0)$ 的，这种推广是合乎情理的。

c) **Gauss' theorem**反映了电荷激发电场通量的基本规律，$\rho(\vec{x})$是因，$\vec{E}(\vec{x})$是果。而 $\rho(\vec{x})$ 与 $\vec{E}(\vec{x})$ 是同一点上，作用不需要时间，即瞬间作用。

6、静电场的旋度（rotation of electrostatic field）

Gauss' theorem只确定了电力线的发散和会聚，对电力线可能存在的其他形式却不能提供任何信息。所以，仅仅有**Gauss' theorem**还不足以决定空间的性质，还必须讨论空间的线积分性质。

方法一：由静电场的表达式出发，即

$$\vec{E}(\vec{x})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{x}')\vec{r}}{r^3}d\tau'$$

由于 $\nabla\frac{1}{r}=-\frac{\vec{r}}{r^3}$ 所以

$$\vec{E}(\vec{x})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \rho(\vec{x}')(-\nabla\frac{1}{r})d\tau'$$

推导

$$=-\nabla\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \rho(\vec{x}')\frac{1}{r}d\tau'$$

$$=-\nabla\varphi(\vec{x})$$

这里 $$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{x}')}{r}\,d\tau'$$

由于任意标量的梯度的旋度恒为零，故有

$$\nabla\times\nabla\varphi(\vec{x}) = 0$$

从而得到 $$\nabla\times\vec{E}(\vec{x}) = \nabla\times\left[-\nabla\varphi(\vec{x})\right] = 0$$

故

$$\boxed{\nabla\times\vec{E}(\vec{x}) = 0}$$

此方程是静电场的又一个基本方程。

<u>方法二：</u>

已知电场的表达式为

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{x}')\vec{r}}{r^3}d\tau'$$

两边取 $\nabla\times$： 即

$$\nabla\times\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\times\int_V \frac{\rho(\vec{x}')\vec{r}}{r^3}d\tau'$$

推导

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \nabla\times\left[\frac{\rho(\vec{x}')\vec{r}}{r^3}\right]d\tau'$$

根据

$$\nabla\times(\varphi\vec{f}) = \nabla\varphi\times\vec{f} + \varphi\nabla\times\vec{f}$$

得到

$$\nabla\times\vec{E}(\vec{x})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \rho(\vec{x}')\nabla\times\frac{\vec{r}}{r^3}d\tau'$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \rho(\vec{x}')\nabla\times(-\nabla\frac{1}{r})d\tau'$$

$$=0$$

即

$$\boxed{\nabla\times\vec{E}(\vec{x})=0}$$

方法三：从线积分形式出发

已知

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$

根据**Stoke’s theorem**, 得到

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla\times\vec{E})\cdot d\vec{s} = 0$$

这里的 $d\vec{s} = ds\hat{\vec{n}}$. $\hat{\vec{n}}$ 为面元法线单位矢量，其指向与闭合回L的环绕方向是呈右手螺旋定则关系。从而有

$$\nabla\times\vec{E}(\vec{x}) = 0$$

最后，我们根据以下两个方程

$$\boxed{\begin{cases}\nabla\cdot\vec{E}(\vec{x})=\dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{x})\\ \nabla\times\vec{E}(\vec{x})=0\end{cases}}$$

可知：

a) 静电场是有源无旋场，电力线不闭合，从正电荷出发到负电荷终止，有头有尾。

b) 静电场的场强表示为标量函数的负梯度，即 $\vec{E}(\vec{x})=-\nabla\varphi$ 因此，它是保守场，电荷在场中沿闭合曲线运动一周电场力做功为零。

c) 因为$\vec{E}(\vec{x}) = -\nabla\varphi$，$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$. 故有

$$\nabla^2\varphi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

这就是静电场中电势φ满足的泊松方程，而

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{x}')}{r}d\tau'$$ 是泊松方程的特解。