

第三章 静磁场

Magnetostatic field

本章研究的主要问题是：恒定电流分布所激发的静磁场。

需要注意：要产生恒定的电流，电场通常也是存在的，在产生电流的电源或者导体表面电荷也是存在的，因而周围空间中也存在着电场；

在恒定情况下，电场和磁场不发生相互作用，因而可以把电场和磁场分离开来求解。

本章主要内容

矢势及其微分方程

磁标势

磁多极矩

A-B效应

超导体的电磁性质

§ 3. 1 矢勢及其微分方程

Vector potential and differential equation

1、矢势

稳恒电流磁场的基本方程是

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j} \end{cases}$$

由此可看出，磁场的特点和电场不同。静电场是无旋的，即引入标势 φ 来描述。而磁场是有旋的，一般不能引入一个标势来描述整个空间的磁场，但由于磁场是无源的，可以引入一个矢量来描述它。

即若

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

则

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

\vec{A} 称为磁场的矢势。

根据斯托克斯定理，可得到

$$\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \iint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{s} = \oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

由此可看到矢势 \vec{A} 的物理意义是：

矢势 \vec{A} 沿任一闭合回路的环量代表通过以该回路为界的任一曲面的磁通量。

必须注意：①只有 \vec{A} 的环量才有物理意义，而在每点

上的 $\vec{A}(\vec{x})$ 值没有直接的物理意义。

② 矢势 \vec{A} 可确定磁场 \vec{B} ，但由 \vec{B} 并不能唯一地确定 \vec{A} ，这是因为对任意函数 ψ 。

$$\nabla \times (\vec{A} + \nabla \psi) = \nabla \times \vec{A}$$

即 $\vec{A} + \nabla \psi$ 和 \vec{A} 对应于同一个 \vec{B} ， \vec{A} 的取值具有任意性， \vec{A} 的环量才有物理意义。

2、矢势微分方程

由于 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ ，引入 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ ，在均匀线性介质内有 $\vec{B} = \mu \vec{H}$ ，将这些代入到 $\nabla \times \vec{H} = \vec{j}$ 中，即

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{j}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu \vec{j}$$

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu \vec{j}$$

若 \vec{A} 满足库仑规范条件 $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ ，得矢势 \vec{A} 的微分方程

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{j} \\ (\nabla \cdot \vec{A} = 0) \end{cases}$$

Pisson's equation

$$\nabla^2 A_i = \mu j_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

由此可见，矢势 \vec{A} 和标势 φ 在静场时满足同一形式的方程，对此静电势的解。

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{x}')}{r} d\tau'$$

可得到矢量的特解：

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{r} d\tau'$$

由此即得

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V (\nabla \frac{1}{r}) \times \vec{j}(\vec{x}') d\tau' \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{x}') \times \vec{r}}{r^3} d\tau'\end{aligned}$$

作变换 $\vec{j}d\tau' \rightarrow Id\vec{l}'$, 即得

$$\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_L \frac{Id\vec{l}' \times \vec{r}}{r^3}$$

这就是毕奥——萨伐尔定律。

当全空间中电流 \vec{j} 给定时, 即可计算磁场 \vec{B} , 对

于电流和磁场互相制约的问题，则必须解微分方程的边值问题。

3、矢势边值关系

当回路短边长度趋于零时

$$\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = (A_{2t} - A_{1t})\Delta l$$

由于回路面积趋于零，有

$$\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \rightarrow 0$$

因此使得

$$(A_{2t} - A_{1t})\Delta l = 0$$

$$A_{2t} = A_{1t} \quad (1)$$

另外，若取 $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ ，仿照第一章关于法向分量边值关系的推导，可得

$$A_{2n} = A_{1n} \quad (\nabla \cdot \vec{A} = 0) \quad (2)$$

(1)、(2) 两式合算，得到

$$\vec{A}_2 \Big|_S = \vec{A}_1 \Big|_S \quad (3)$$

即在两介质分界面上，矢势 \vec{A} 是连续的。

4、静磁场的能量

磁场的总能量为
$$W = \frac{1}{2} \int_V \vec{B} \cdot \vec{H} d\tau$$

在静磁场中，可以用矢势 \vec{A} 和电流 \vec{j} 表示总能量，即

$$\begin{aligned}\vec{B} \cdot \vec{H} &= (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{H} \\ &= \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{H}) + \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{H}) \\ &= \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{H}) + \vec{A} \cdot \vec{j}\end{aligned}$$

即有：

$$\begin{aligned}W &= \frac{1}{2} \int_{\infty} [\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{H}) + \vec{A} \cdot \vec{j}] d\tau \\ &= \frac{1}{2} \oint_s (\vec{A} \times \vec{H}) \cdot d\vec{s} + \frac{1}{2} \int_{\infty} \vec{A} \cdot \vec{j} d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_{\infty} \vec{A} \cdot \vec{j} d\tau\end{aligned}$$

这里不能把 $\frac{1}{2} \vec{A} \cdot \vec{j}$ 看作为能量密度。因为能量分布于磁场中，而不仅仅存在于电流分布区域内。另外，能量式中的 \vec{A} 是由电流 \vec{j} 激发的。

如果考虑两个独立电流系之间的相互作用能，则设电流系 \vec{j}_e 建立矢势为 \vec{A}_e ，另一电流系 \vec{j} 建立矢势为 \vec{A} ， \vec{j}_e 分布于 $\vec{x}_1 \in V_1$ ， \vec{j} 分布于 $\vec{x}_2 \in V_2$ ，若电流分布为

$$\vec{j}_{\text{总}}(\vec{x}) = \vec{j}_e(\vec{x}_1) + \vec{j}(\vec{x}_2) \quad (\vec{x} \in V_1 \cup V_2 = V).$$

磁场总能量为

$$W_{\text{总}} = \frac{1}{2} \int_V \vec{j}_{\text{总}} \cdot \vec{A}_{\text{总}} d\tau$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_V (\vec{j}_e + \vec{j}) \cdot (\vec{A}_e + \vec{A}) d\tau \\
&= \frac{1}{2} \int_{V_1} \vec{j}_e \cdot \vec{A}_e d\tau + \frac{1}{2} \int_{V_2} \vec{j} \cdot \vec{A} d\tau \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{V_{1or2}} (\vec{j}_e \cdot \vec{A} + \vec{j} \cdot \vec{A}_e) d\tau
\end{aligned}$$

由此可见，上式右边第一、二项是电流系 \vec{j}, \vec{j}_e 各自的自能，其相互作用能为

$$W_i = \frac{1}{2} \int_{V_{1or2}} (\vec{j}_e \cdot \vec{A} + \vec{j} \cdot \vec{A}_e) d\tau$$

因为其中:

$$\vec{A}(\vec{x}_1) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V_2} \frac{\vec{j}(\vec{x}_2)}{r} d\tau_2$$

$$\vec{A}_e(\vec{x}_2) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V_1} \frac{\vec{j}_e(\vec{x}_1)}{r} d\tau_1$$

$$r = |\vec{x}_1 - \vec{x}_2| = |\vec{x}_2 - \vec{x}_1|$$

所以

$$\int_{V_1} \vec{j}_e \cdot \vec{A} d\tau_1 = \int_{V_1} \int_{V_2} \vec{j}_e(\vec{x}_1) \cdot \frac{\mu}{4\pi} \frac{\vec{j}(\vec{x}_2)}{r} d\tau_1 d\tau_2$$

$$\int_{V_2} \vec{j} \cdot \vec{A}_e d\tau_2 = \int_{V_1} \int_{V_2} \vec{j}(\vec{x}_2) \cdot \frac{\mu}{4\pi} \frac{\vec{j}_e(\vec{x}_1)}{r} d\tau_1 d\tau_2$$

该两式相等，因此电流 \vec{j} 在外场 \vec{A}_e 中的相互作用能量为

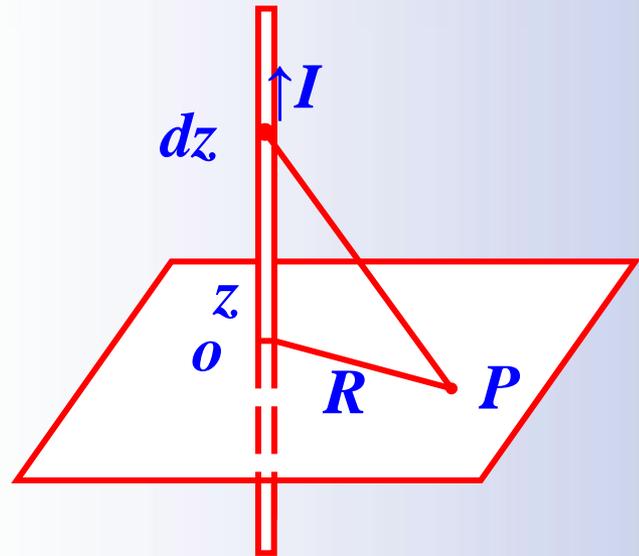
$$W_i = \int_V \vec{j} \cdot \vec{A}_e dv$$

5、举例讨论用 \vec{A} 计算

[例1] 无穷长直导线载电流 I ，求空间的矢势 \vec{A} 和磁场 \vec{B} 。

Solution :

取导线沿 z 轴，设 p 点到导线的垂直距离为 R ，电流元 $I dz$ 到 p 点距离为 $\sqrt{R^2 + z^2}$



因此得到

$$A_z = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I dz}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{\mu I}{4\pi} \ln(z + \sqrt{z^2 + R^2}) \Big|_{-\infty}^{\infty}$$

积分结果是无穷大（发散的）。计算两点的矢势差值可以免除发散，若取 R_0 点的矢势值为零，则

$$\begin{aligned} A_z(p) - A_z(p_0) &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\mu I}{4\pi} \ln \frac{z + \sqrt{z^2 + R^2}}{z + \sqrt{z^2 + R_0^2}} \Big|_{-M}^M \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\mu I}{4\pi} \ln \left[\frac{1 + \sqrt{1 + R^2/M^2}}{1 + \sqrt{1 + R_0^2/M^2}} \cdot \frac{-1 + \sqrt{1 + R_0^2/M^2}}{-1 + \sqrt{1 + R^2/M^2}} \right] \end{aligned}$$

每项相乘后，再二次项展开得

$$= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\mu I}{4\pi} \ln \left[\frac{R_0^2 + \frac{1}{4} \frac{R_0^2 R^2}{M^2}}{R^2 + \frac{1}{4} \frac{R_0^2 R^2}{M^2}} \right]$$
$$= \frac{\mu I}{4\pi} \ln \frac{R_0^2}{R^2} = \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{R_0}{R} = -\frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{R}{R_0}$$

亦即

$$\vec{A}(p) - \vec{A}(p_0) = -\frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{R}{R_0} \vec{e}_z$$

0 

故

$$\vec{A}(p) = -\frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{R}{R_0} \vec{e}_z$$

取 \vec{A} 的旋度，得到

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \nabla \times \vec{A} = -\nabla \times \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{R}{R_0} \vec{e}_z \\ &= -\frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{R}{R_0} \nabla \times \vec{e}_z - \nabla \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{R}{R_0} \times \vec{e}_z \\ &= -\nabla \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{R}{R_0} \times \vec{e}_z \\ &= -\nabla \frac{\mu I}{2\pi} (\ln R - \ln R_0) \times \vec{e}_z \\ &= -\frac{\mu I}{2\pi} \frac{1}{R} \vec{e}_R \times \vec{e}_z = \frac{\mu I}{2\pi R} \vec{e}_z \times \vec{e}_R = \frac{\mu I}{2\pi R} \vec{e}_\theta\end{aligned}$$

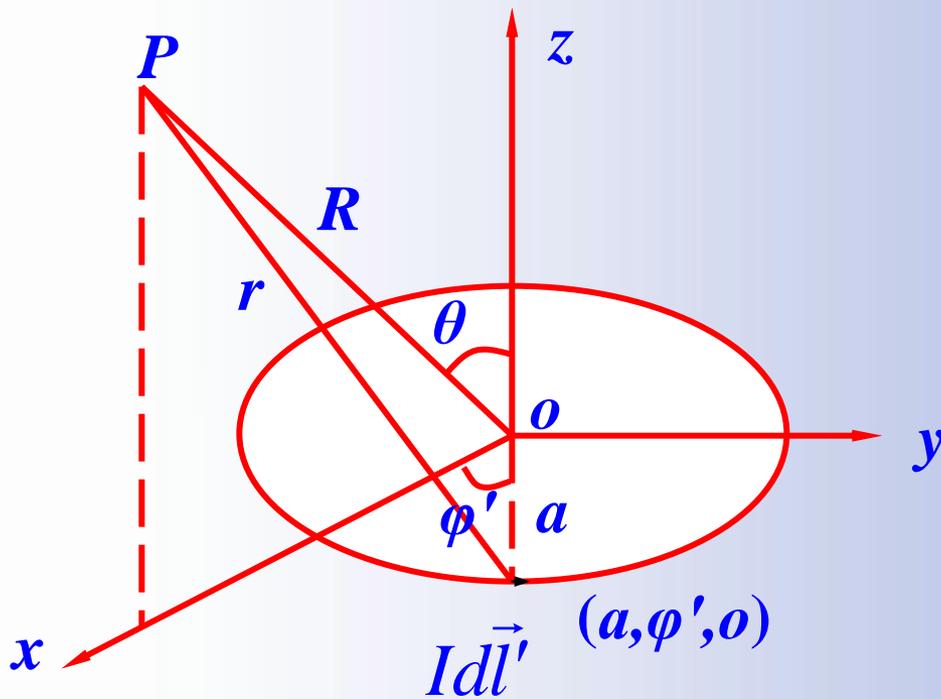
结果与电磁学求解一致。

[例2]半径为 a 的导线圆环载电流为 I ，求空间的矢势和磁感应强度。

Solution:

首先求解矢势 \vec{A}

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{r} d\tau' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I d\vec{l}'}{r}\end{aligned}$$



由于问题具有轴对称性，可以把观察点选在 xz 平面上，这样的好处是 $\phi'=0$ ，故 只与 r, θ 有关。

$$\because r^2 = a^2 + R^2 - 2Ra \cos\Phi \quad (\Phi = \vec{R} \wedge \vec{a})$$

$$d\vec{l}' = \vec{i} dl'_x + \vec{j} dl'_y$$

其中

$$\begin{cases} l'_x = \cos\phi'a & dl'_x = -a \sin\phi'd\phi' \\ l'_y = \sin\phi'a & dl'_y = a \cos\phi'd\phi' \end{cases}$$

即得

$$A_x = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a \sin\phi'd\phi'}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra \cos\Phi}}$$

$$A_y = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a \cos\phi'd\phi'}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra \cos\Phi}}$$

在图上分析有

$$\cos \Phi = \sin \theta \cos \phi'$$

因此得到：

$$\begin{aligned} A_x &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a \sin \phi' d\phi'}{\left[R^2 + a^2 - 2Ra \sin \theta \cos \phi' \right]^{1/2}} \\ &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a \sin \phi' d\phi'}{\left[a^2 + \rho^2 + z^2 - 2a\rho \cos \phi' \right]^{1/2}} \end{aligned}$$

$$R^2 = \rho^2 + z^2, \sin \theta = \rho / R$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{ad \cos\phi'}{\left[a^2 + \rho^2 + z^2 - 2a\rho \cos\phi'\right]^{1/2}} \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(-\frac{1}{a\rho}\right) \left[a^2 + \rho^2 + z^2 - 2a\rho \cos\phi'\right]^{1/2} \Bigg|_0^{2\pi} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$A_y = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a \cos\phi' d\phi'}{\left[a^2 + \rho^2 + z^2 - 2\rho a \cos\phi'\right]^{1/2}}$$

作变换:

令 $\alpha = \frac{1}{2}(\phi' - \pi)$, 则 $\phi' = 2\alpha + \pi$

这样 $\cos \phi' = \cos(2\alpha + \pi) = -\cos(2\alpha) = 2\sin^2 \alpha - 1$
 $d\phi' = 2d\alpha$

于是有

$$\begin{aligned} A_y &= \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2(2\sin^2 \alpha - 1)d\alpha}{\left[a^2 + \rho^2 + z^2 - 2\rho a(2\sin^2 \alpha - 1) \right]^{1/2}} \\ &= \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{(2\sin^2 \alpha - 1)d\alpha}{\left[a^2 + \rho^2 + z^2 - 2\rho a(2\sin^2 \alpha - 1) \right]^{1/2}} \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2\sin^2 \alpha - 1)d\alpha}{\left[a^2 + \rho^2 + z^2 - 2\rho a(2\sin^2 \alpha - 1) \right]^{1/2}} \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{\mu_0 I a}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2 \sin^2 \alpha - 1) d\alpha}{\left[a^2 + \rho^2 + z^2 - 2 \rho a (2 \sin^2 \alpha - 1) \right]^{1/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 I a}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2 \sin^2 \alpha - 1) d\alpha}{\left[(a + \rho)^2 + z^2 - 4 \rho a \sin^2 \alpha \right]^{1/2}}$$

令 $k^2 = 4 a \rho \left[(a + \rho)^2 + z^2 \right]^{-1}$ ， 则有

$$A_y = \frac{\mu_0 I a}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2 \sin^2 \alpha - 1) d\alpha}{\left[(a + \rho)^2 + z^2 \right]^{1/2} (1 - k^2 \sin^2 \alpha)^{1/2}}$$

考虑一般情况，这里的 y 方向实际上就是 \vec{e}_ϕ 方向，因

此上式可改为:

$$\begin{aligned}
 A_{\phi} &= \frac{\mu_0 I a}{\pi} \frac{1}{\left[(a + \rho)^2 + z^2 \right]^{1/2}} \int_0^{\pi/2} \frac{(2 \sin^2 \alpha - 1) d\alpha}{(1 - k^2 \sin^2 \alpha)^{1/2}} \\
 &= \frac{\mu_0 I a}{\pi} \frac{1}{\left[(a + \rho)^2 + z^2 \right]^{1/2}} \int_0^{\pi/2} \frac{2 \sin^2 \alpha - \frac{2}{k^2} + \left(\frac{2}{k^2} - 1 \right)}{(1 - k^2 \sin^2 \alpha)^{1/2}} d\alpha \\
 &= \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \left(\frac{a}{\rho} \right)^{1/2} \left\{ -\frac{2}{k^2} \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \alpha)^{1/2} d\alpha \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{2}{k^2} - 1 \right) \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{(1 - k^2 \sin^2 \alpha)^{1/2}} \right\}
 \end{aligned}$$

令

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{(1-k^2 \sin^2 \alpha)^{1/2}}$$

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} (1-k^2 \sin^2 \alpha)^{1/2} d\alpha$$

这里 $K(k)$ ， $E(k)$ 分别为第一、第二类椭圆积分。从而得到

$$\begin{aligned} A_\phi &= \frac{\mu_0 I k}{2\pi} \left(\frac{a}{\rho}\right)^{1/2} \left\{ -\frac{2}{k^2} E(k) + \left(\frac{2}{k^2} - 1\right) K(k) \right\} \\ &= \frac{\mu_0 I}{\pi k} \left(\frac{a}{\rho}\right)^{1/2} \left\{ \left(1 - \frac{k^2}{2}\right) K(k) - E(k) \right\} \end{aligned}$$

故磁感应强度的严格表达式为

$$B_{\rho} = -\frac{\partial A_{\phi}}{\partial z} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{z}{\rho[(a+\rho)^2 + z^2]^{1/2}} \left[-\mathbf{K}(k) + \frac{a^2 + \rho^2 + z^2}{(a-\rho)^2 + z^2} \mathbf{E}(k) \right]$$

$$B_{\phi} = 0$$

$$B_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_{\phi})$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{[(a+\rho)^2 + z^2]^{1/2}} \left[\mathbf{K}(k) + \frac{a^2 - \rho^2 - z^2}{(a-\rho)^2 + z^2} \mathbf{E}(k) \right]$$

讨论:

对于远场, 由于 $R \gg a$, 且有

$$\cos \Phi = \sin \theta \cos \phi'$$

$$A_{\phi} = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi' d\phi'}{(a^2 + R^2 - 2Ra \sin \theta \cos \phi')^{1/2}}$$

当 $R \gg a$ 情况下，上式分母展开为：

$$\begin{aligned} & (a^2 + R^2 - 2Ra \sin \theta \cos \phi')^{-1/2} \\ &= (a^2 + R^2)^{-1/2} \left(1 - \frac{2Ra \sin \theta \cos \phi'}{a^2 + R^2}\right)^{-1/2} \\ &= (a^2 + R^2)^{-1/2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{2aR \sin \theta \cos \phi'}{a^2 + R^2}\right) \end{aligned}$$

于是得到

$$\begin{aligned}
A_\phi &= \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi'}{(a^2 + R^2)^{1/2}} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{2aR}{a^2 + R^2} \sin \theta \cos \phi' \right] d\phi' \\
&= \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi'}{(a^2 + R^2)^{1/2}} d\phi' + \frac{\mu_0 I a}{8\pi} \frac{2aR}{a^2 + R^2} \sin \theta \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi' d\phi' \\
&= \frac{I a^2 R \mu_0}{4\pi} \frac{1}{(a^2 + R^2)^{3/2}} \sin \theta \left[\frac{1}{2} \phi' + \frac{1}{4} \sin 2\phi' \right] \Big|_0^{2\pi} \\
&= \frac{\mu_0 I a}{4} \frac{R}{(a^2 + R^2)^{3/2}} \sin \theta
\end{aligned}$$

若 $R \gg a$, 且

$$\begin{aligned}
 A_\phi &= \frac{\mu_0 I a^2}{4} \frac{1}{R^2} \sin \theta = \frac{\mu_0 I S}{4\pi} \frac{1}{R^2} \sin \theta \\
 &= \frac{\mu_0 m}{4\pi R^2} \sin \theta
 \end{aligned}$$

于是磁感应强度为

$$\begin{aligned}
 \vec{B} = \nabla \times \vec{A} &= \frac{1}{R \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \vec{e}_r \\
 &+ \frac{1}{R} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial R} (R A_\phi) \right] \vec{e}_\theta \\
 &+ \frac{1}{R} \left[\frac{\partial}{\partial R} (R A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \vec{e}_\phi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2\mu_0 m \cos \theta}{4\pi R^3} \vec{e}_r + \frac{\mu_0 m \sin \theta}{4\pi R^3} \vec{e}_\theta \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\vec{m} \cdot \vec{R})\vec{R}}{R^5} - \frac{\vec{m}}{R^3} \right] \end{aligned}$$

可见，对于一个圆电流环，在远处所激发的磁场，相当于一个磁矩为 \vec{m} 的磁偶极子激发的场。

§ 3.2 磁标势

Magnetic scalar potential

本节所研究的问题是避开矢量 \vec{A} 求磁感应强度 \vec{B} 的不便理由。类比于静电场，引入磁标势 φ_m 。然后讨论 φ_m 所满足的微分方程，继而讨论静磁问题的唯一性定理。

1、磁标势引入的条件

(1) 所考虑的空间区域没有传导电流

(2) 空间应为单连通区域

2、磁标势 φ_m 的方程

在能引入磁标势的区域内，磁场满足：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = 0 \end{cases}$$

在磁介质中， \vec{B} 和 \vec{H} 的关系是（不论是铁磁质还是非铁磁质）：

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$$

因为 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ ，代入上式，则得

$$\nabla \cdot \vec{H} = -\nabla \cdot \vec{M}$$

与电介质中极化电荷密度的表达式 $\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}$ 类比，
可以假想磁荷密度为

$$\rho_m = -\mu_0 \nabla \cdot \vec{M}$$

于是，得到与电介质中的静电场方程类似的形式

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{H} = \rho_m / \mu_0 \\ \nabla \times \vec{H} = 0 \end{cases}$$

将 $\vec{H} = -\nabla \varphi_m$ 代入上式，即得到

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi_m = -\rho_m / \mu_0 \\ \rho_m = -\mu_0 \nabla \cdot \vec{M} \end{cases}$$

从 \vec{B} 和 \vec{H} 的边值关系可以求得 φ_m 在交界面上的关系：
由 $\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0$ ，得到

$$\varphi_{m1}|_S = \varphi_{m2}|_S$$

由 $\hat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$ ，及 $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$ 可得

$$\frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial n} \Big|_S - \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial n} \Big|_S = \hat{n} \cdot (\vec{M}_2 - \vec{M}_1)$$

对于非铁磁质来说， $\vec{B} = \mu\vec{H}$ ，故得到

$$\mu_2 \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial n} \Big|_S = \mu_1 \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial n} \Big|_S$$

由此可见，交界面上的关系和静电介质完全类似。因此，引入磁荷和磁标势的好处在于可以借用静电学中的方法。

3、静磁问题的唯一性定理

当所考虑的区域是单连通的，其中没有传导电流分布时，可引入磁标势 $\vec{H} = -\nabla \varphi_m$ ，通过和静电学问题的唯一性定理同样的推导，可得出静磁问题的唯一性定理：

如果可均匀分区的区域 V 中没有传导电流分布，只要在边界 S 上给出下列条件之一，则 V 内磁场唯一地确定：

a) 磁标势之值 $\varphi_m|_S$.

b) 磁场强度的法向分量 $H_n|_S = -\frac{\partial \varphi_m}{\partial n}|_S$.

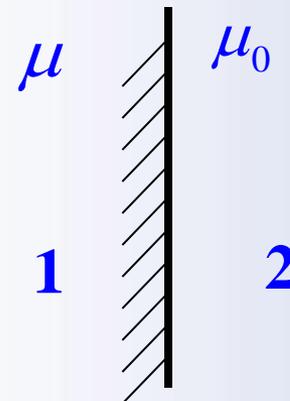
c) 磁场强度的切向分量 $H_t|_S$.

4、磁标势的应用举例

[例1] 证明 $\mu \rightarrow \infty$ 的磁性物质表面为等磁势面。

Solution:

角标1代表磁性
物质、角标2为真空



由磁场边界条件:

$$\hat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0, \quad \hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0$$

以及

$$\vec{B}_2 = \mu_0 \vec{H}_2, \quad \vec{B}_1 = \mu_1 \vec{H}_1$$

可得到法向和切向分量为

$$\mu_0 H_{2n} = \mu H_{1n}, \quad H_{2t} = H_{1t}$$

两式相除, 得

$$\frac{H_{2t}}{\mu_0 H_{2n}} = \frac{H_{1t}}{\mu H_{1n}}$$
$$\frac{H_{2t}}{H_{2n}} = \frac{\mu_0 H_{1t}}{\mu H_{1n}} \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} 0$$

因此，在该磁性物质外面， H_2 与表面垂直（切向分量与法向分量之比 $\rightarrow 0$ ），因而表面为等磁势面。

[例2]求磁化矢量为 \vec{M}_0 的均匀磁化铁球产生的磁场。

Solution:

铁球内外为两均匀区域，在铁球外没有磁荷分布（ $\rho_{m外} = 0$ ），在铁球内由于均匀磁化 \vec{M}_0 ，而 $\rho_{m内} = -\nabla \cdot \vec{M}_0 = 0$ ，因此磁荷只能分布在铁球表面上，故球内、外磁势都满足Laplace's equation.

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi_{m1} = 0 & (r \geq R_0 \text{ 球半径}) \\ \nabla^2 \varphi_{m2} = 0 & (R_0 \geq r) \end{cases}$$

由于轴对称性，极轴沿 \vec{M}_0 方向，上式解的形式为：

$$\varphi_{m1} = \sum_n (a_n r^n + b_n r^{-(n+1)}) p_n(\cos\theta)$$

$$\varphi_{m2} = \sum_n (c_n r^n + d_n r^{-(n+1)}) p_n(\cos\theta)$$

球外磁标势必随距离 r 增大而减小，即

$$\varphi_{m1} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad \text{即 } a_n = 0$$

球内磁标势当 $r=0$ 时必为有限，即

$$\varphi_{m2} \Big|_{r=0} = \text{有限值}, \quad \text{从而得到 } d_n = 0$$

故有：

$$\varphi_{m1} = \sum_n b_n r^{-(n+1)} p_n(\cos\theta) \quad (r \geq R_0)$$

$$\varphi_{m2} = \sum_n c_n r^n p_n(\cos\theta) \quad (R_0 \geq r)$$

铁球表面边界条件为、

当 $r=R_0$ 时:

$$B_{1r} \Big|_{r=R_0} = B_{2r} \Big|_{r=R_0}$$

$$\text{或者} \quad \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial n} \Big|_{r=R_0} - \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial n} \Big|_{r=R_0} = \hat{n} \cdot \vec{M}_0$$

$$H_{1\theta} \Big|_{r=R_0} = H_{2\theta} \Big|_{r=R_0}$$

$$\text{或者} \quad \varphi_{m1} \Big|_{r=R_0} = \varphi_{m2} \Big|_{r=R_0}$$

设球外为真空, 则

$$\begin{aligned}
B_{1r} &= \mu_0 H_{1r} = -\mu_0 \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial r} \\
&= \mu_0 \sum_n (n+1) b_n r^{-(n+2)} P_n(\cos \theta) \\
B_{2r} &= \mu_0 H_{2r} + \mu_0 M_r \\
&= -\mu_0 \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial r} + \mu_0 M_0 \cos \theta \\
&= -\mu_0 \sum_n n c_n r^{n-1} P_n(\cos \theta) + \mu_0 M_0 \cos \theta
\end{aligned}$$

由边界条件得:

$$\sum_n (n+1) b_n R_0^{-(n+2)} P_n(\cos \theta) = -\sum_n n c_n R_0^{n-1} P_n(\cos \theta) + M_0 P_1(\cos \theta)$$

$$\sum_n b_n R_0^{-(n+1)} P_n(\cos \theta) = \sum_n c_n R_0^n P_n(\cos \theta)$$

比较 $P_n(\cos\theta)$ 的系数:

当 $n=1$ 时, 有

$$\begin{cases} 2b_1R_0^{-3} = -c_1 + M_0 \\ b_1R_0^{-2} = c_1R_0 \end{cases}$$

所以

$$c_1 = \frac{1}{3}M_0, \quad b_1 = \frac{1}{3}M_0R_0^3$$

当 $n \neq 1$ 时, 有

$$c_n = b_n = 0$$

从而得到

$$\varphi_{m1} = \frac{1}{3} M_0 R_0^3 r^{-2} \cos \theta = \frac{M_0 R_0^3 \cos \theta}{3r^2} = \frac{R_0^3 \vec{M}_0 \cdot \vec{r}}{3r^3}$$

$$\varphi_{m2} = \frac{1}{3} M_0 r \cos \theta = \frac{1}{3} \vec{M}_0 \cdot \vec{r}$$

铁球内、外的磁场强度为

$$\begin{aligned} \vec{H}_1 &= -\nabla \varphi_{m1} = -\left(\frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\theta\right) \frac{R_0^3 M_0 \cos \theta}{3r^2} \\ &= \frac{2M_0 R_0^3 \cos \theta}{3r^3} \vec{e}_r + \frac{M_0 R_0^3 \sin \theta}{3r^3} \vec{e}_\theta \\ &= \frac{2m \cos \theta}{4\pi r^3} \vec{e}_r + \frac{m \sin \theta}{4\pi r^3} \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

其中： $m = MV = M_0 \frac{4}{3} \pi R_0^3$ 。由此可见铁球外的磁场相当于一个磁偶极子所激发的场。

$$\begin{aligned}\vec{H}_2 &= -\nabla \varphi_{m2} = -\frac{1}{3} M_0 (\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta) \\ &= -\frac{1}{3} M_0 \vec{k}\end{aligned}$$

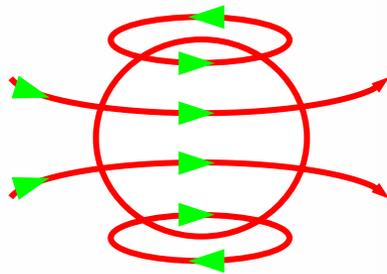
把 \vec{M}_0 取在 \vec{k} 方向上，即有

$$\vec{H}_2 = -\frac{1}{3} \vec{M}_0$$

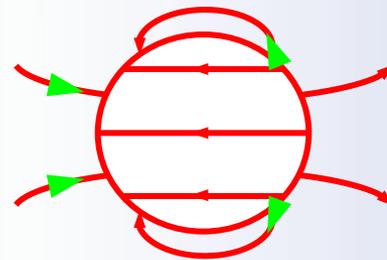
$$\vec{B}_2 = \mu_0 (\vec{H}_2 + \vec{M}_2) = \mu_0 (\vec{H}_2 + \vec{M}_0) = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M}_0$$

进一步讨论可见：

\vec{B} 线总是闭合的， \vec{H} 线且不然， \vec{H} 线是从右半球面上的正磁荷发出，终止于左半球面的负磁荷上。在铁球内， \vec{B} 与 \vec{H} 反向。说明磁铁内部的 \vec{B} 与 \vec{H} 是有很大的差异的。



\vec{B} 线是闭合的



\vec{H} 线由正磁荷发出到负磁荷止

§ 3.3 磁多极矩

Magnetic multipole moment

本节研究空间局部范围内的电流分布所激发的磁场在远处的展开式。与电多极矩 (electric multipole moment) 对应。引入磁多极矩概念，并讨论这种电流分布在外磁场中的能量问题。

1、矢势 \vec{A} 的多极展开

给定电流分布在空间中激发的磁场矢势为

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{r} d\tau'$$

如果电流分布集中在一个小区域 V 中，而场点 \vec{x} 又距离该区域比较远，这时可仿照静电情况的电多极矩展开的方法，把矢势 $\vec{A}(\vec{x})$ 作多极展开，即把 $\frac{1}{r}$ 在区域内的某一点展开成 \vec{x}' 的幂级数。若展开点取在坐标的原点，则

$$\begin{aligned}
 \vec{A}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{r} d\tau' \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{j}(\vec{x}') \left[\frac{1}{R} - \vec{x}' \cdot \nabla \frac{1}{R} + \frac{1}{2!} \vec{x}' \vec{x}' : \nabla \nabla \frac{1}{R} + \dots \right] d\tau' \\
 &= \vec{A}^{(0)}(\vec{x}) + \vec{A}^{(1)}(\vec{x}) + \vec{A}^{(2)}(\vec{x}) + \dots
 \end{aligned}$$

展开式的第一项:

$$\begin{aligned}\vec{A}^{(0)}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{j}(\vec{x}') \frac{1}{R} d\tau' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi R} \oint_L I d\vec{l}' \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \oint_L d\vec{l}' \\ &= 0\end{aligned}$$

即 $\vec{A}^{(0)}(\vec{x}') = 0$

表示没有与自由电荷对应的自由磁荷存在。

展开式的第二项:

$$\begin{aligned}\vec{A}^{(1)}(\vec{x}) &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{j}(\vec{x}') \vec{x}' \cdot \nabla \frac{1}{R} d\tau' \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{j}(\vec{x}') x'_i \nabla_i \frac{1}{R} d\tau' \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla_i \frac{1}{R} \int_V \vec{j}(\vec{x}') x'_i d\tau'\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}\vec{j}(\vec{x}') x'_i &= \frac{1}{2} [\vec{j}(\vec{x}') x'_i + j_i(\vec{x}') \vec{x}'] + \frac{1}{2} [\vec{j}(\vec{x}') x'_i - j_i(\vec{x}') \vec{x}'] \\ \nabla' \cdot [\vec{j}(\vec{x}') \vec{x}' x'_i] &= [\nabla' \cdot \vec{j}(\vec{x}')] \vec{x}' x'_i + \vec{j}(\vec{x}') \cdot [\nabla' \vec{x}'] x'_i + \vec{x}' \vec{j}(\vec{x}') \cdot \nabla' x'_i \\ &= \vec{j}(\vec{x}') x'_i + j_i(\vec{x}') \vec{x}'\end{aligned}$$

这里用到了稳恒电流条件

$$\nabla' \cdot \vec{j}(\vec{x}') = 0$$

所以

$$\begin{aligned}\vec{A}^{(1)}(\vec{x}) &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla_i \frac{1}{R} \int_V \vec{j}(\vec{x}') x'_i d\tau' \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla_i \frac{1}{R} \int_V \frac{1}{2} [\vec{j}(\vec{x}') x'_i + j_i(\vec{x}') \vec{x}'] d\tau' \\ &\quad - \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla_i \frac{1}{R} \int_V \frac{1}{2} [\vec{j}(\vec{x}') x'_i - j_i(\vec{x}') \vec{x}'] d\tau' \\ &= \frac{\mu_0}{8\pi} \nabla_i \frac{1}{R} \int_V \nabla' \cdot [\vec{j}(\vec{x}') \vec{x}' x'_i] d\tau'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\mu_0}{8\pi} \nabla_i \frac{1}{R} \int_V [\vec{j}(\vec{x}') x'_i - j_i(\vec{x}') \vec{x}'] d\tau' \\
&= -\frac{\mu_0}{8\pi} \nabla_i \frac{1}{R} \oint_S [\vec{j}(\vec{x}') \vec{x}' x'_i] d\vec{s}' \quad \rightarrow \mathbf{0} \\
& -\frac{\mu_0}{8\pi} \nabla_i \frac{1}{R} \int_V [\vec{j}(\vec{x}') x'_i - j_i(\vec{x}') \vec{x}'] d\tau' \\
&= -\frac{\mu_0}{8\pi} \nabla_i \frac{1}{R} \int_V [\vec{j}(\vec{x}') x'_i - j_i(\vec{x}') \vec{x}'] d\tau' \\
&= -\frac{\mu_0}{8\pi} \int_V \left[\vec{j}(\vec{x}') x'_i \nabla_i \frac{1}{R} - \vec{x}' j_i(\vec{x}') \nabla_i \frac{1}{R} \right] d\tau' \\
&= -\frac{\mu_0}{8\pi} \int_V \left[\vec{j}(\vec{x}') \vec{x}'_i \cdot \nabla \frac{1}{R} - \vec{x}' \vec{j}_i(\vec{x}') \cdot \nabla \frac{1}{R} \right] d\tau'
\end{aligned}$$

其中 $[\vec{j}(\vec{x}')\vec{x}' - \vec{x}'\vec{j}(\vec{x}')]\cdot\vec{R} = [\vec{x}'\times\vec{j}(\vec{x}')]\times\vec{R}$

故得到

$$\begin{aligned}\vec{A}^{(1)}(\vec{x}) &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \left[\frac{1}{2} \int_V \vec{x}' \times \vec{j}(\vec{x}') d\tau' \right] \times \nabla \frac{1}{R} \right\} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{R}}{R^3}\end{aligned}$$

式中:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int_V \vec{x}' \times \vec{j}(\vec{x}') d\tau'$$

称此为磁矩。

$\vec{A}^{(1)}(\vec{x})$ 表示把整个电流系的磁矩集中在原点时，一个磁矩对场点所激发的矢势。作为一级近似结果。
展开式的第三项：

$$\vec{A}^{(2)}(\vec{x}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{j}(\vec{x}') \frac{1}{2!} \vec{x}'\vec{x}' : \nabla\nabla \frac{1}{R} d\tau'$$

将会是更高级的磁矩激发的矢量势。因为比较复杂，一般不去讨论。

综上所述：小区域电流分布所激发的磁场，其矢势可看作一系列在原点的磁多极子对场点激发的矢势的迭加。

2、磁偶极矩的场和磁标势

根据 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ ，即有

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \nabla \times \vec{A} = \nabla \times [\vec{A}^{(0)} + \vec{A}^{(1)} + \vec{A}^{(2)} + \dots] \\ &= \vec{B}^{(0)} + \vec{B}^{(1)} + \dots\end{aligned}$$

由此可见

$$\vec{B}^{(0)} = \nabla \times \vec{A}^{(0)} = 0$$

$$\begin{aligned}\vec{B}^{(1)} &= \nabla \times \vec{A}^{(1)} = \nabla \times \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{R}}{R^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(\vec{m} \times \frac{\vec{R}}{R^3} \right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\left(\nabla \cdot \frac{\vec{R}}{R^3} \right) \vec{m} - (\vec{m} \cdot \nabla) \frac{\vec{R}}{R^3} \right]\end{aligned}$$

因为讨论的是区域V外的场，在 $R \neq 0$ 处，有

$$\nabla \cdot \frac{\vec{R}}{R^3} = -\nabla \cdot \nabla \frac{1}{R} = -\nabla^2 \frac{1}{R} = 0$$

故得到

$$\begin{aligned} \vec{B}^{(1)} &= -\frac{\mu_0}{4\pi} (\vec{m} \cdot \nabla) \frac{\vec{R}}{R^3} \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla (\vec{m} \cdot \frac{\vec{R}}{R^3}) \end{aligned} \quad (\vec{m} \text{为常矢})$$

由此可见在电流分布以外的空间中

$$\vec{H}^{(1)} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^{(1)} = -\nabla \varphi_m^{(1)}$$

故得

$$\begin{aligned}\varphi_m^{(1)} &= \frac{1}{4\pi} \vec{m} \cdot \frac{\vec{R}}{R^3} \\ &= \frac{\vec{m} \cdot \vec{R}}{4\pi R^3}\end{aligned}$$

3、小区域内电流分布在外磁场中的能量

设外场 \vec{B}_e 的矢势为 \vec{A}_e ，电流 $\vec{j}(\vec{x}')$ 分布在外磁场中的能量为：

$$W_i = \int_V \vec{j}(\vec{x}') \cdot \vec{A}_e(\vec{x}') d\tau'$$

对于环形小电流，则有

$$\begin{aligned}W_i &= \int_v \vec{j}(\vec{x}') \cdot \vec{A}_e(\vec{x}') ds' dl' \\&= I \oint_L \vec{A}_e \cdot d\vec{l}' = I \iint_S (\nabla \times \vec{A}_e) \cdot d\vec{s}' \\&= I \iint_S \vec{B}_e \cdot d\vec{s}'\end{aligned}$$

当电流环线度很小， \vec{B}_e 变化不大时，取原点在线圈所在区域适当位置上，把 \vec{B}_e 在原点附近展开：

$$\vec{B}_e(\vec{x}') = \vec{B}_e(0) + \vec{x}' \cdot \nabla \vec{B}_e(0) + \dots$$

所以，得到

$$\begin{aligned}W_i &= i \iint_S \left[\vec{B}_e(0) + \vec{x}' \cdot \nabla \vec{B}_e(0) + \dots \right] \cdot d\vec{s}' \\ &= W_i^{(1)} + W_i^{(2)} + \dots\end{aligned}$$

可见

$$\begin{aligned}W_i^{(1)} &= I \iint_S \vec{B}_e(0) \cdot d\vec{s}' \\ &= I \vec{B}_e(0) \cdot \iint_S d\vec{s}' \\ &= I \vec{B}_e(0) \cdot \vec{S} \\ &= \vec{m} \cdot \vec{B}_e(0)\end{aligned}$$

4、磁矩在外磁场中受力和力矩

体积 V 内的电流受外磁场的作用力为

$$\vec{F} = \int_V \vec{j}(\vec{x}') \times \vec{B}_e(\vec{x}') d\tau'$$

而 $\vec{B}_e(\vec{x}') = \vec{B}_e(0) + \vec{x}' \cdot \nabla \vec{B}_e(0) + \dots$

从而得到

$$\vec{F} = \int_V \vec{j}(\vec{x}') \times \left[\vec{B}_e(0) + \vec{x}' \cdot \nabla \vec{B}_e(0) + \dots \right] d\tau'$$

第一项:

$$\begin{aligned}\vec{F}^{(1)} &= \int_V \vec{j}(\vec{x}') \times \vec{B}_e(0) d\tau' \\ &= -\vec{B}_e(0) \times \int_V \vec{j}(\vec{x}') d\tau' \\ &= -\vec{b}_e(0) \times I \oint_L d\vec{l}' \\ &= -\vec{B}_e(0) \times 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

第二项:

$$\begin{aligned}\vec{F}^{(2)} &= \int_V \vec{j}(\vec{x}') \times [\vec{x}' \cdot \nabla \vec{B}_e(0)] d\tau' \\ &= \int_V \vec{j}(\vec{x}') \times \nabla [\vec{x}' \cdot \vec{B}_e(0)] d\tau' \\ &= -\nabla' \times \int_V \vec{j}(\vec{x}') [\vec{x}' \cdot \vec{B}_e(0)] d\tau'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\nabla' \times \int_V B_{e_i}(0) \vec{j}(\vec{x}') x'_i d\tau' \\
&= -\nabla' \times \left[B_{e_i}(0) \int_V \vec{j}(\vec{x}') x'_i d\tau' \right] \\
&= -\nabla' \times \left\{ B_{e_i}(0) \int_V \frac{1}{2} [\vec{j}(\vec{x}') x'_i + j_i(\vec{x}') \vec{x}'] d\tau' \right\} \\
&\quad - \nabla' \times \left\{ B_{e_i}(0) \int_V \frac{1}{2} [\vec{j}(\vec{x}') x'_i - j_i(\vec{x}') \vec{x}'] d\tau' \right\} \\
&= -\nabla' \times \left\{ \frac{1}{2} B_{e_i}(0) \int_V \nabla' \cdot [\vec{j}(\vec{x}') x'_i \vec{x}'] d\tau' \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\nabla' \times \left\{ \frac{1}{2} B_{e_i}(0) \int_{\underline{V}} [\vec{j}(\vec{x}') x'_i - j_i(\vec{x}') \vec{x}'] d\tau' \right\} \\
& = -\nabla' \times \left\{ \frac{1}{2} B_{e_i}(0) \oiint_S [\vec{j}(\vec{x}') x'_i \vec{x}'] d\tau' \right\} \rightarrow \mathbf{0} \\
& -\nabla' \times \left\{ \frac{1}{2} B_{e_i}(0) \int_{\underline{V}} [\vec{j}(\vec{x}') x'_i - j_i(\vec{x}') \vec{x}'] d\tau' \right\} \\
& = -\nabla' \times \left\{ \frac{1}{2} B_{e_i}(0) \int_{\underline{V}} [\vec{j}(\vec{x}') x'_i - j_i(\vec{x}') \vec{x}'] d\tau' \right\} \\
& = -\nabla' \times \left\{ \frac{1}{2} \int_{\underline{V}} [\vec{j}(\vec{x}') x'_i B_{e_i}(0) - \vec{x}' j_i(\vec{x}') B_{e_i}(0)] d\tau' \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\nabla' \times \left\{ \frac{1}{2} \int_V [\vec{j}(\vec{x}')(\vec{x}'_i \cdot \vec{B}_{e_i}(0)) - \vec{x}'(\vec{j}_i(\vec{x}') \cdot \vec{B}_{e_i}(0))] d\tau' \right\} \\
&= -\nabla' \times \left\{ \frac{1}{2} \int_V [\vec{x}' \times \vec{j}(\vec{x}')] d\tau' \times \vec{B}_e(0) \right\} \\
&= -\nabla' \times [\vec{m} \times \vec{B}_e(0)]
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= -\nabla' \times [\vec{m} \times \vec{B}_e(0)] \\
&= (\vec{m} \cdot \nabla') \vec{B}_e(0) + (\nabla' \cdot \vec{m}) \vec{B}_e(0) \\
&\quad - (\vec{B}_e(0) \cdot \nabla') \vec{m} - (\nabla' \cdot \vec{B}_e(0)) \vec{m} \\
&= (\vec{m} \cdot \nabla') \vec{B}_e(0) \\
&= \vec{m} \cdot \nabla' \vec{B}_e(0)
\end{aligned}$$

同理，考虑一个小区域内的电流在外磁场中受到的力矩为：

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \int_V \vec{x}' \times [\vec{j}(\vec{x}') \times \vec{B}_e(\vec{x}')] d\tau' \\ &= \int_V \vec{x}' \times \left\{ \vec{j}(\vec{x}') \times [\vec{B}_e(0) + \vec{x}' \cdot \nabla' \vec{B}_e(0) + \dots] \right\} d\tau'\end{aligned}$$

展开式的第一项：

$$\begin{aligned}\vec{L}^{(1)} &= \int_V \vec{x}' \times [\vec{j}(\vec{x}') \times \vec{B}_e(0)] d\tau' \\ &= \int_V \left\{ \vec{j}(\vec{x}') [\vec{x}' \cdot \vec{B}_e(0)] - [\vec{x}' \cdot \vec{j}(\vec{x}')] \vec{B}_e(0) \right\} d\tau' \\ &= \int_V \vec{j}(\vec{x}') [\vec{x}' \cdot \vec{B}_e(0)] d\tau' - \frac{1}{2} \vec{B}_e(0) \int_V \nabla' \cdot [x'^2 \vec{j}(\vec{x}')] d\tau'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\nu} \vec{j}(\vec{x}') [\vec{x}' \cdot \vec{B}_e(0)] d\tau' - \frac{1}{2} \vec{B}_e(0) \oint_S x'^2 \vec{j}(\vec{x}') \cdot d\vec{s}' \\
&= \int_{\nu} \vec{j}(\vec{x}') [\vec{x}' \cdot \vec{B}_e(0)] d\tau' \quad \text{---} \quad \text{0} \\
&= \int_{\nu} \vec{j}(\vec{x}') x'_i B_{e_i}(0) d\tau' \\
&= B_{e_i}(0) \int_{\nu} \vec{j}(\vec{x}') x'_i d\tau' \\
&= B_{e_i}(0) \int_{\nu} \frac{1}{2} [\vec{j}(\vec{x}') x'_i + j_i(\vec{x}') \vec{x}'] d\tau' \\
&\quad + B_{e_i}(0) \int_{\nu} \frac{1}{2} [\vec{j}(\vec{x}') x'_i - j_i(\vec{x}') \vec{x}'] d\tau'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} B_{e_i}(0) \int_V \nabla' \cdot [\vec{j}(\vec{x}') x'_i \vec{x}'] d\tau' \\
&+ \frac{1}{2} \int_V \left\{ \vec{j}(\vec{x}') [\vec{x}' \cdot \vec{B}_e(0)] - \vec{x}' [\vec{B}_e(0) \cdot \vec{j}(\vec{x}')] \right\} d\tau' \\
&= \frac{1}{2} \int_V [\vec{x}' \times \vec{j}(\vec{x}')] d\tau' \times \vec{B}_e(0) \\
&= \vec{m} \times \vec{B}_e(0)
\end{aligned}$$

故得到

$$\vec{L} = \vec{m} \times \vec{B}_e(0)$$