

第一章 电磁现象的普遍规律

Universal Law of Electromagnetic Phenomenon

本章将从基本的电磁实验定律出发建立真空中的**Maxwell's equations**。并从微观角度论证了存在介质时的**Maxwell's equations**的形式及其电磁性质的本构关系。继而给出**Maxwell's equations**在边界上的形式，及其电磁场的能量和能流，最后讨论**Maxwell's equations**的自洽性和完备性。

本章主要内容

电荷守恒定律

电荷与电场

电流和磁场

麦克斯韦方程组

介质的电磁性质

电磁场边值关系

电磁场的能量和能流

麦克斯韦方程组的自洽性和完备性

§ 1.1 电荷守恒定律

The Conservation Law of Charge

电荷不会产生也不会消失.

-----电荷守恒定律

1. 电荷密度(Charge Density)

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} \quad \text{电荷连续分布带电体}$$

$$\rho = \sum_i q_i \delta(x - x_i) \quad \text{点电荷分布带电体}$$

面电荷密度

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S}$$

线电荷密度

$$\lambda = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l}$$

2 电流密度 (Current density)

电荷的运动形成电流，通常用 $\vec{j}$ 来描述，其定义为

$$\vec{j} = \rho \vec{v}$$

$\vec{v}$ 代表电荷密度 ρ 的运动速度。

3 电流强度 (Current intensity)

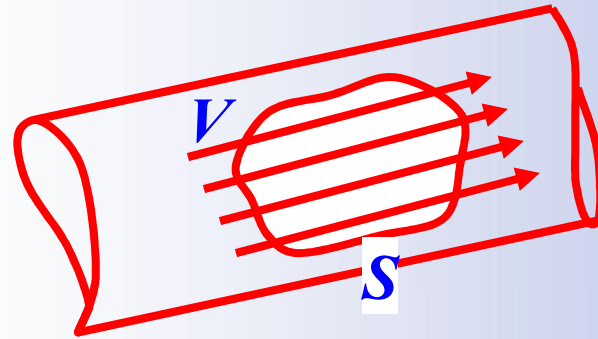
单位时间内垂直穿过导线横截面的电量称为电流强度，用 I 表示，显然 I 与 $\vec{j}$ 的关系为

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{s}$$

3. 电荷守恒 (Conservation of Charge)

对于封闭系统，总电荷保持不变。实验表明电荷是守恒的。即一处电荷增加了，另一处的电荷必然减少，而且增加和减少的量值相等。

若在通有电流的导体内部，任意找出一个小体积 V ，包围这个体积的闭合曲面为 S ，并且假定电流的体积 V 的一面流入，从另一面流出。



单位时间内穿过 S 曲面流出去的电量为

$$dQ = \oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{s}$$

而流出去的电量应该等于封闭曲面 S 内总电荷在单位时间内的减少量，即

$$-\frac{d}{dt} \int_V \rho d\tau$$

所以

$$\oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho d\tau$$

根据Gauss' theorem, 有

$$\oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{s} = \int_V \nabla \cdot \vec{j} d\tau$$

若所选取的封闭曲面 S 不随时间变化, 则

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}) d\tau = 0$$

由于曲面 S 是任意选取的, 所以被积函数恒为零, 即

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

这就是电荷守恒定律的数学表达式, 也称连续性方程。

注意：

a) 在稳定电流的情况下，由于 $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ ，所以

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0$$

这表示稳定电流线是闭合的。

b) 对于全空间 V ， S 为无穷远界面，由于 S 面上没有电流流出，即 $\oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$ ，从而得到

$$-\frac{d}{dt} \int_V \rho d\tau = 0$$

表示全空间的总电荷守恒。

§ 1.2 电荷与电场

Electric Charge and Electric Field

库仑定律

叠加原理

电场

高斯定理

电场的散度

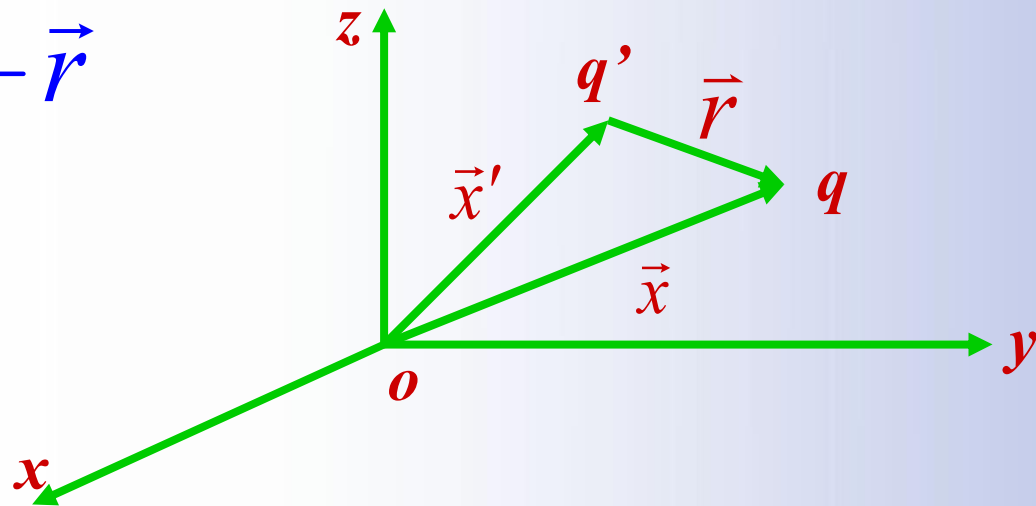
电场的旋度

1. 库仑定律 (Coulomb's law)

Coulomb's law是描写真空中两个静止的点电荷 q' 和 q 之间相互作用力的定律。其数学表达式为

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^3} \vec{r}$$

$$\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}'$$



式中 $\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}'$ 表示 q' 到 q 的矢径, $\vec{F}$ 表示电荷 q 受到 q' 的作用力。同理, q' 受到 q 的作用力 $\vec{F}'$ 是:

$$\vec{F}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'q}{r^3} \vec{r}' = -\vec{F}$$

这里的 $\vec{r}' = -\vec{r}$

Coulomb's law 是大家熟知的, 在这里要着重指出的是: 该定律在电磁学发展史上占有重要的地位, 它的发现使人们对电现象由定性的研究过渡到定量的研究, 这是电学研究的转折点, 特别是它的平方反比律性质, 是 **Gauss theorem** 的基础。现代物理实验证明, 如果把库仑力写成正比于 $r^{-(2+\epsilon)}$, 则 ϵ 的值 (极限) 为 $(2.7 \pm 3.1) \times 10^{-16}$ 。在整个经典物理领域乃至量子领域里, 平方反比律都成立。

2、叠加原理 (principle of superposition)

Coulomb's law所说明的只是空间存在的两个点电荷之间的相互作用。实际上，往往同时存在多个电荷，这时任意两个电荷之间的相互作用的规律是什么呢？每个电荷受到多大的作用力呢？总结了許多实验以后，人们发现：

若空间存在 n 个电荷 $q_1, q_2 \cdots q_n$ ，这时任意一个电荷 q_j ，受到其它所有电荷对它的作用力为

$$\vec{F}_j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_j q_i}{r_{ji}^3} \vec{r}_{ji}$$

此式称为线性叠加原理。

原理是假设性的，它并不能从理论本身中产生，其可靠性由实验来检验。迄今为止，在经典范围内和我们可以达到的场强下还没有找到一个反例显示出线性叠加原理的失效。

实际上电荷分布是不连续的，因为电荷是量子化的，任何物体所带的电荷总是电子电荷的整数倍。但在考查物体的宏观性质时能观察到的总是大量微观粒子的平均效应，因此常用到电荷连续分布的概念来代替电荷的分立性。

定义体电荷密度为

$$\rho = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta\tau} = \frac{dQ}{d\tau}$$

其中 dQ 是这空间任一体积元 $d\tau$ 中所含的电量。因此，一个点电荷 q 受到一个电荷连续分布的带电体的作用力为

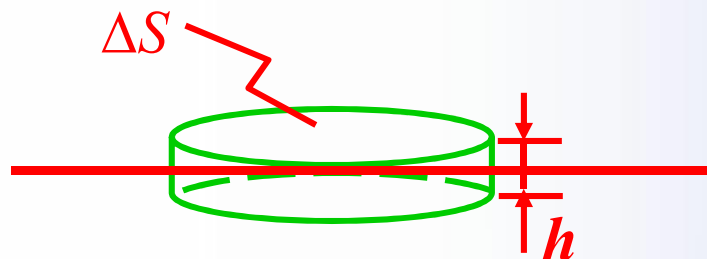
$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{q\rho}{r^3} \vec{r} d\tau$$

式中 $\vec{r}$ 是 $d\tau$ 指向 q 的位置矢量。

显然，两个电荷连续分布的带电体之间的相互作用力为

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_1} \int_{V_2} \frac{\rho_1 \rho_2}{r^3} \vec{r} d\tau_1 d\tau_2$$

虽然电荷的真实分布是体电荷分布，但在实际中会碰到电荷集中分布在靠近物体表面的一个薄层内，此时常引入面电荷密度来描述这种电荷分布。



若电荷分布在表面薄层 h 内，用 ΔS 代表表面上的任一小面积元，则体积元 $h\Delta S$ 内的电量为

$$\Delta Q = h\rho\Delta S$$

定义面电荷密度为

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} = \frac{dQ}{dS} = h\rho$$

3、电场 (electric field)

由Coulomb's law得知，在一个给定电荷分布的空间内某一点放置一个点电荷 q ，此点电荷所受的力由两个因素决定：一是点电荷本身的位置及其电量的大小；二是给定周围电荷的分布和电量的大小。由于放置点电荷 q 将会直接影响给定电荷的分布，因此为了使问题简单，我们在讨论放置电荷 q 的运动时，常把其余电荷看作保持原先的分布，即其余电荷的相对位置都是固定不变的。于是，作用在电荷 q 上的力仅与该电荷的电量 q 及其位置有关，即

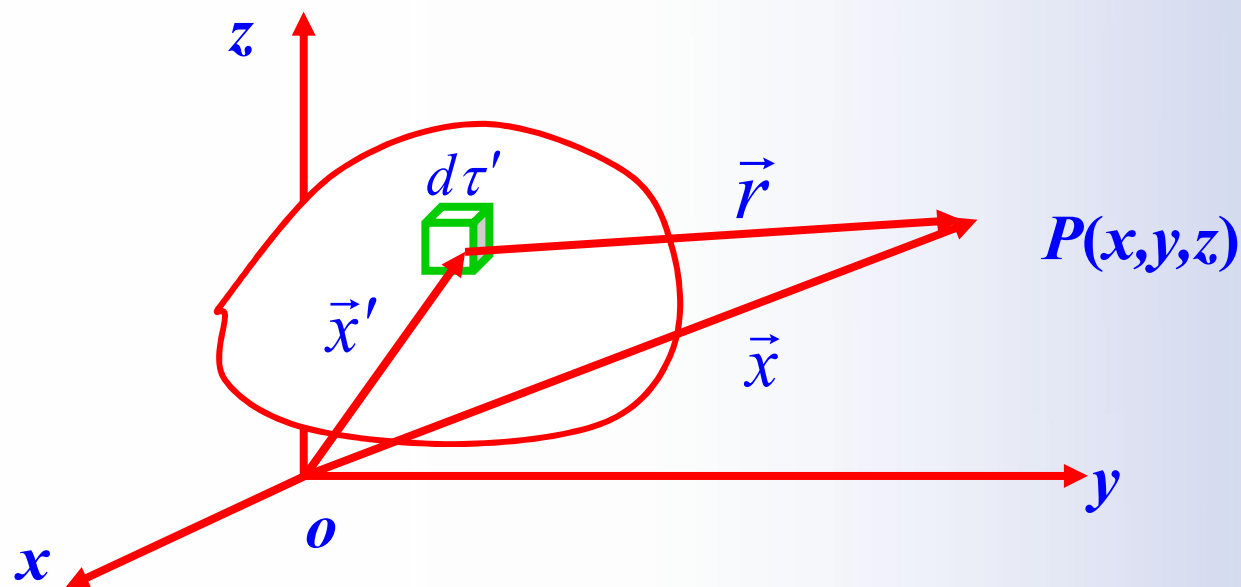
$$\vec{F} = q\vec{E}(\vec{x})$$

式中 $\vec{x}$ 是点电荷 q 所在的位置矢量, $\vec{F}(\vec{x})$ 是点 $\vec{x}$ 的某一矢量函数, 与 **Coulomb's law** 比较, 可以看出

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i(\vec{x} - \vec{x}'_i)}{|\vec{x} - \vec{x}'_i|^3}$$

或者

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{x}')(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} d\tau' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{x}')}{r^3} \hat{r} d\tau'\end{aligned}$$



式中 $\vec{x}$ 是场点 P 的位置矢量, $\vec{x}'$ 是源点 $\rho(\vec{x}')d\tau'$ 的位置矢量, $\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}'$

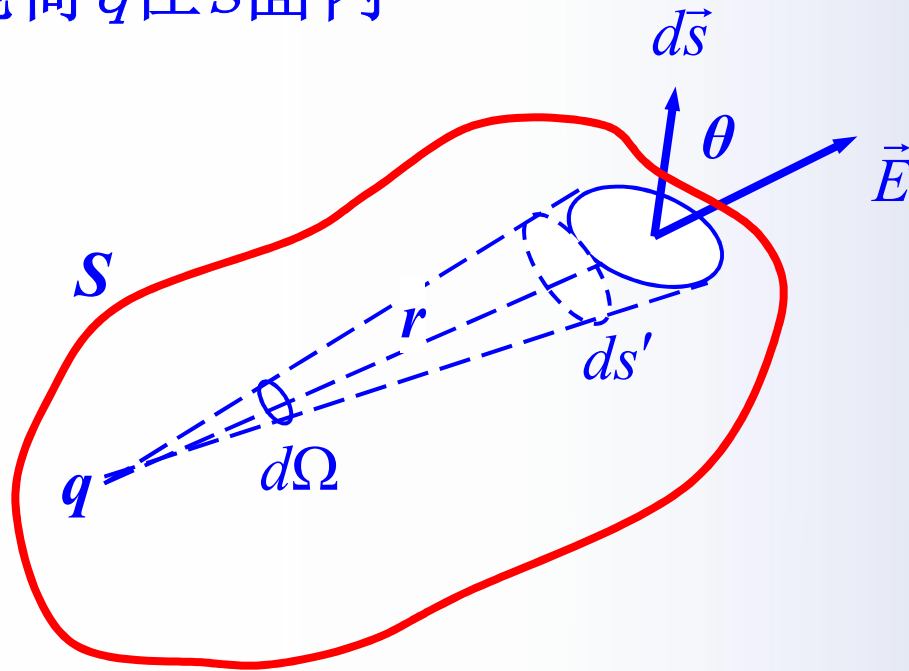
要讨论点电荷 q 的运动就要知道它所受到的作用力。求作用力可归结为求函数 $\vec{E}(\vec{x})$, 而它决定于空间除 q 以外其余电荷的分布, 这个函数就称为**电场强度**。

4、高斯定理 (**Gauss' theorem**)

现在，具体分析一下电荷分布产生的电场 $\vec{E}(\vec{x})$ 的一般性质。所谓电场其实是带电体周围的一个特殊空间，特殊性表现在：当我们在这个空间放入一个点电荷时，该电荷会受到作用力。

Gauss' theorem 主要是讨论电场强度 $\vec{E}(\vec{x})$ 的面积分，在点电荷场中，设 s 表示包围着点电荷 q 的一个闭合面， $d\vec{s}$ 为 s 上的定向面元，以外法线方向为正。

a) 如果点电荷 q 在 S 面内

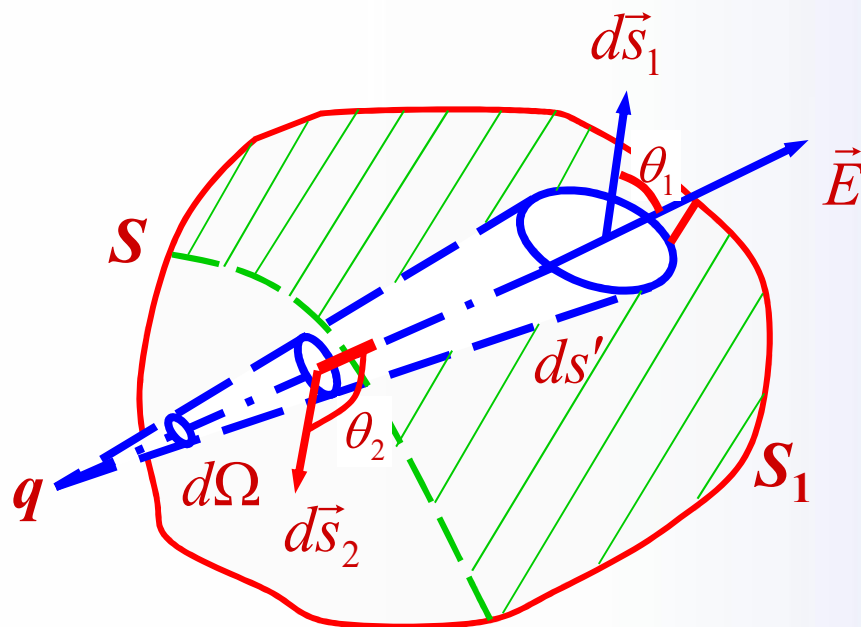


对于空间任一封闭曲面 S 作 $\vec{E}$ 的面积分, 可得

推导

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oiint_S d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0}$$

b) 如果点电荷 q 在 S 面外，把 S 面分成两部分，
照明部分 S_2 和阴影部分 S_1 ，则



推导

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[- \iint_{S_2} d\Omega + \iint_{S_1} d\Omega \right] = 0$$

由此可得到结论:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \begin{cases} \frac{q}{\epsilon_0} & q \text{ 在 } S \text{ 面内} \\ 0 & q \text{ 在 } S \text{ 面外} \end{cases}$$

根据叠加原理, 在点电荷系场中, 则存在着如下形式:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_k + \cdots + \vec{E}_n) \cdot d\vec{S}$$

设 $q_1, q_2, \cdots, q_k$ 在 S 内, $q_{k+1}, q_{k+2}, \cdots, q_n$ 在 S 外, 则有

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^k q_i = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \text{S面内}$$

对于连续分布的电荷体系来说, 则有

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho d\tau$$

5、静电场的散度 (divergence of electrostatic field)

方法一:

已知 $\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho d\tau$ 根据Gauss公式:

$$\oiint_S \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_V \nabla \cdot \vec{A} d\tau$$

得到 $\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_V \nabla \cdot \vec{E} d\tau$

将此与Gauss定理比较, 得到

$$\int_V \nabla \cdot \vec{E} d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho d\tau$$

即有

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{E} - \frac{1}{\epsilon_0} \rho) d\tau = 0$$

故

$$\nabla \cdot \vec{E} - \frac{1}{\epsilon_0} \rho = 0$$

从而得到

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

严格说来:

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{x})$$

方法二:

已知 $\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{x}')\vec{r}}{r^3} d\tau'$, 对该式两边作用

$\nabla \cdot$, 即

推导

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{x})$$

讨论:

a) 空间任一点 $\vec{E}(\vec{x})$ 的散度仅仅决定于该点的电荷密度, 而 $\nabla \cdot \vec{E}(\vec{x})$ 描述场源的性质 (有检源作用)。

b) **Gauss' theorem**是由**Coulomb's law**导出的，它是一个有限范围，而**Gauss' theorem**是一个宏观无限小 ($\Delta\tau \rightarrow 0$) 的，这种推广是合乎情理的。

c) **Gauss' theorem**反映了电荷激发电场通量的基本规律， $\rho(\vec{x})$ 是因， $\vec{E}(\vec{x})$ 是果。而 $\rho(\vec{x})$ 与 $\vec{E}(\vec{x})$ 是同一点上，作用不需要时间，即瞬间作用。

6、静电场的旋度 (**rotation of electrostatic field**)

Gauss' theorem只确定了电力线的发散和会聚，对电力线可能存在的其他形式却不能提供任何信息。所以，仅仅有**Gauss' theorem**还不足以决定空间的性质，还必须讨论空间的线积分性质。

方法一：由静电场的表达式出发，即

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{x}')\vec{r}}{r^3} d\tau'$$

由于 $\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$ 所以

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{x}')(-\nabla \frac{1}{r}) d\tau'$$

推导

$$\begin{aligned} &= -\nabla \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{x}') \frac{1}{r} d\tau' \\ &= -\nabla \varphi(\vec{x}) \end{aligned}$$

这里 $\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{x}')}{r} d\tau'$

由于任意标量的梯度的旋度恒为零，故有

$$\nabla \times \nabla \varphi(\vec{x}) = 0$$

从而得到 $\nabla \times \vec{E}(\vec{x}) = \nabla \times [-\nabla \varphi(\vec{x})] = 0$
故

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{x}) = 0$$

此方程是静电场的又一个基本方程。

方法二：

已知电场的表达式为

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{x}')\vec{r}}{r^3} d\tau'$$

两边取 $\nabla \times$: 即

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \times \int_V \frac{\rho(\vec{x}')\vec{r}}{r^3} d\tau'$$

推导

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \nabla \times \left[\frac{\rho(\vec{x}')\vec{r}}{r^3} \right] d\tau'$$

根据

$$\nabla \times (\varphi \vec{f}) = \nabla \varphi \times \vec{f} + \varphi \nabla \times \vec{f}$$

得到

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E}(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{x}') \nabla \times \frac{\vec{r}}{r^3} d\tau' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{x}') \nabla \times \left(-\nabla \frac{1}{r}\right) d\tau' \\ &= 0\end{aligned}$$

即

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{x}) = 0$$

注: 从线积分形式出发

已知 $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ (保守力场)

根据Stoke's theorem, 得到

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{s} = 0$$

这里的 $d\vec{s} = ds\hat{n}$. $\hat{n}$ 为面元法线单位矢量, 其指向与闭合回 L 的环绕方向是呈右手螺旋定则关系。从而有

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{x}) = 0$$

最后，我们根据以下两个方程

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{x}) \\ \nabla \times \vec{E}(\vec{x}) = 0 \end{cases}$$

可知：

a) 静电场是有源无旋场，电力线不闭合，从正电荷出发到负电荷终止，有头有尾。

b) 静电场的场强表示为标量函数的负梯度，即 $\vec{E}(\vec{x}) = -\nabla \varphi$ 因此，它是保守场，电荷在场中沿闭合曲线运动一周电场力做功为零。

c) 因为 $\vec{E}(\vec{x}) = -\nabla\varphi$, $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho$. 故有

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho$$

这就是静电场中电势 φ 满足的泊松方程，而

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{x}')}{r} d\tau' \text{ 是泊松方程的特解。}$$

§ 1.3 电流和磁场

Electric Current and Magnetic Field

本节主要讨论磁场的基本规律，因为磁场是与电流相互作用的，而Ampere's law在静磁学中的地位同Coulomb's law 在静电学中的地位相当，所以，这节中的电流元相当于上节中的点电荷，在讨论磁场规律之前，先讨论电流分布的基本规律。

1、安培定律(Ampere's law)

最先是由Ampere建立了电流与电流之间的相互作用力的关系，若真空中有两个稳定的电流元 $\vec{j}_1 d\tau_1$ 和 $\vec{j}_2 d\tau_2$ ，则电流元 $\vec{j}_1 d\tau_1$ 受到电流元 $\vec{j}_2 d\tau_2$ 的作用力为

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}_1 d\tau_1 \times (\vec{j}_2 d\tau_2 \times \vec{r}_{12})}{r_{12}^3}$$

同理， $\vec{j}_2 d\tau_2$ 受到 $\vec{j}_1 d\tau_1$ 的作用力 $d\vec{F}_{21}$ 为

$$\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}_2 d\tau_2 \times (\vec{j}_1 d\tau_1 \times \vec{r}_{21})}{r_{21}^3}$$

在线电流分布的情况下，有 $\vec{j} d\tau \rightarrow Id\vec{l}$ ，于是得到

$$d\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times (I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{r}_{12})}{r_{12}^3}$$

$$d\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times (I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{21})}{r_{21}^3}$$

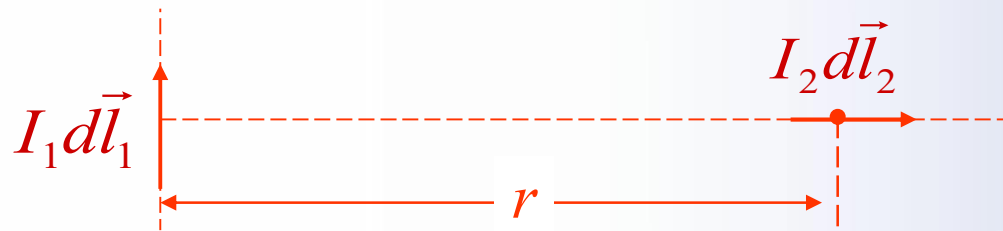
以上是Ampere's law的数表达式。

将Ampere's law与Coulomb's law比较，可看到

- a) 电流元之间的相互作用力也服从平方反比律；
- b) 电流元之间的相互作用力的方向不具有有心性质；
- c) 电流元之间的相互作用力不满足Newton的作用力和反

作用力定律，即

$$d\vec{F}_{12} \neq d\vec{F}_{21}$$



这个矛盾之所以出现，是因为我们考虑了两个孤立的电流元之间的作用力，而孤立的电流元是不存在的。

真实的电流总是构成闭合回路的，因而电流元相互作用力的公式应该进行回路积分。如果有两个闭合回路1和2，那么且有

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times (I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{r}_{12})}{r_{12}^3}$$

利用公式 $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$ 即得

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \left\{ \left(\frac{I_1 d\vec{l}_1 \cdot \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \right) I_2 d\vec{l}_2 - \left(\frac{I_1 d\vec{l}_1 \cdot I_2 d\vec{l}_2}{r_{12}^3} \right) \vec{r}_{12} \right\}$$

推导

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_1 \oint_2 \left\{ \frac{d\vec{l}_1 \cdot \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} d\vec{l}_2 - \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} \right\}$$

该式第一项可写为：

$$\begin{aligned} \oint_2 d\vec{l}_2 \oint_1 \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \cdot d\vec{l}_1 &= \oint_2 d\vec{l}_2 \oint_1 \frac{\hat{\vec{r}}_{12}}{r_{12}^2} \cdot d\vec{l}_1 \\ &= \oint_2 d\vec{l}_2 \oint_1 \frac{dl_1 \cos(\hat{\vec{r}}_{12}, d\vec{l}_1)}{r_{12}^2} = \oint_2 d\vec{l}_2 \oint_1 \frac{dr_{12}}{r_{12}^2} \end{aligned}$$

因为 $\oint_L \frac{dr}{r^2} = -\oint_L d\frac{1}{r} = 0$

所以 $\oint_2 d\vec{l}_2 \oint_1 \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \cdot d\vec{l}_1 = \oint_2 d\vec{l}_2 \oint_1 \frac{dr_{12}}{r_{12}^2} = 0$

因此则有：
$$\vec{F}_{12} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_1 \oint_2 \frac{(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2)}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}$$

类似地，
$$\begin{aligned} \vec{F}_{21} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times (I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{21})}{r_{21}^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_1 \oint_2 \left\{ \frac{d\vec{l}_2 \cdot \vec{r}_{21}}{r_{21}^3} d\vec{l}_1 - \frac{d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}_1}{r_{21}^3} \vec{r}_{21} \right\} \end{aligned}$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_1 \oint_2 \frac{(d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}_1)}{r_{21}^3} \vec{r}_{21}$$

因为 $\vec{r}_{12} = -\vec{r}_{21}$ ，故得

$$\boxed{\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}}$$

这说明只有两闭合回路电流之间的相互作用才满足Newton作用与反作用定律。

2、磁场 (magnetic field)

类似于两个点电荷之间作用力通过静电场进行的情形，两个电流元之间的作用力则是通过所谓的磁场进行的。因此，也可由Ampere's law引入磁场的

概念。

实验指出，一个电流元 $\vec{j}_1 d\tau_1$ 在磁场中所受到的力可以写为

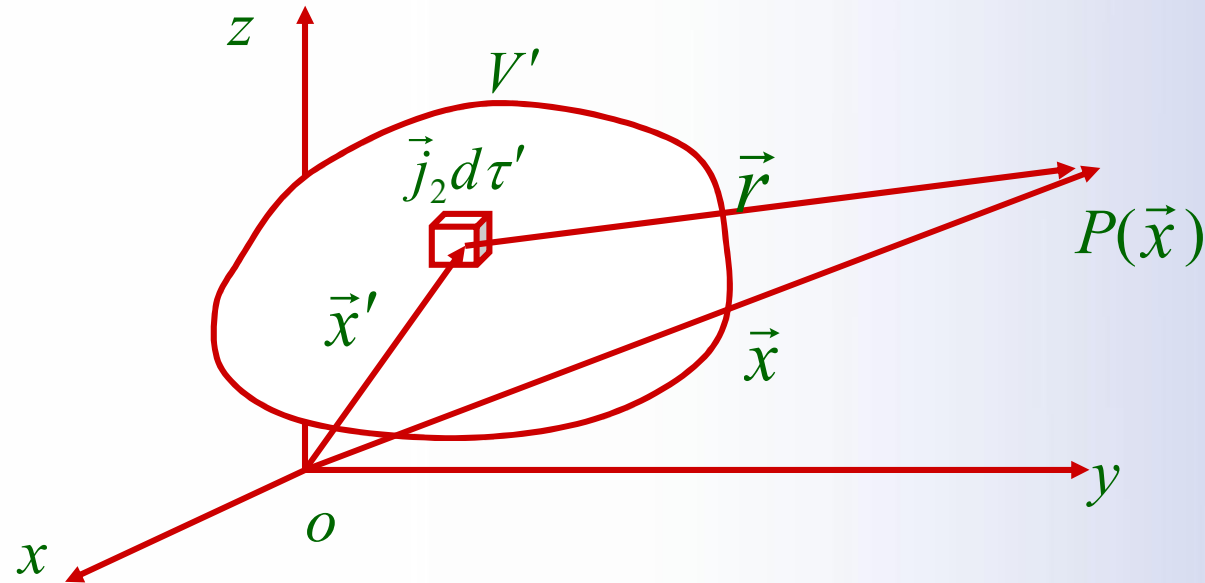
$$d\vec{F}_1(\vec{x}) = \vec{j}_1(\vec{x}) d\tau_1 \times \vec{B}(\vec{x})$$

将此式与 **Ampere's law** 比较，即得

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{j}_2(\vec{x}') d\tau' \times \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3}$$

但是，根据叠加原理，矢量函数 $\vec{B}(\vec{x})$ 的一般形式为

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{V'} \vec{j}(\vec{x}') d\tau' \times \frac{\vec{r}}{r^3}$$



对于线电流:

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_L \frac{I' d\vec{l}' \times \vec{r}}{r^3}$$

这就是毕奥——萨伐尔定律 (**Biot-Savart's law**)

若有一电荷 q 以速度 $\vec{v}$ 运动, 则它所产生的磁感

应强度为

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} q\vec{v} \times \frac{\vec{r}}{r^3} = \varepsilon_0 \mu_0 \vec{v} \times \vec{E} \\ &= \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}\end{aligned}$$

3、磁场的散度 (divergence of magnetic field)

已知电流分布 $\vec{j}(\vec{x})$ 在空间一点 $P(\vec{x})$ 处所激发的磁感应强度为

推导

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{x}') \times \vec{r}}{r^3} d\tau' \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{j}(\vec{x}') \times \nabla \frac{1}{r} d\tau' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \frac{1}{r} \times \vec{j}(\vec{x}') d\tau'\end{aligned}$$

式中 $\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}'$, ∇ 是对场点 $\vec{x}$ 微分, 与源点 $\vec{x}'$ 无关, 运用公式

$$\nabla \times (\varphi \vec{f}) = \nabla \varphi \times \vec{f} + \varphi \nabla \times \vec{f}$$

这里, φ 相当于上式中的 $\frac{1}{r}$, $\vec{f}$ 相当于 $\vec{j}(\vec{x}')$, 因此

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[\nabla \times \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{r} - \frac{1}{r} \nabla \times \vec{j}(\vec{x}') \right] d\tau'$$

其中, 因为 ∇ 对 $\vec{x}'$ 的函数无关, 所以

$$\nabla \times \vec{j}(\vec{x}') = 0$$

从而得到

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \times \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{r} d\tau'$$

又因为积分是对 $\vec{x}'$ 函数而言的，所以 ∇ 可以提到积分号外，故

$$\vec{B}(\vec{x}) = \nabla \times \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{r} d\tau'$$

令

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{r} d\tau'$$

且得

$$\vec{B}(\vec{x}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{x})$$

如果对 $\vec{B}(\vec{x})$ 求散度，则得

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{x}) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}(\vec{x})) = 0$$

故得

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{x}) = 0$$

由此可见，稳恒电流所激发的磁感应强度是一个无源矢量场，即 $\vec{B}(\vec{x})$ 线是一个闭合曲线。

4、磁场的旋度 (rotor of magnetic field)

因为 $\vec{B}(\vec{x}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{x})$ ，对 $\vec{B}(\vec{x})$ 求旋度，即

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{B}(\vec{x}) &= \nabla \times [\nabla \times \vec{A}(\vec{x})] \\ &= \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}\end{aligned}$$

先看第一项 $\nabla \cdot \vec{A} = ?$

推导

$$\nabla \cdot \vec{A}(\vec{x}) = \nabla \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{r} d\tau'$$

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \vec{A}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left(-\nabla' \cdot \frac{1}{r} \right) \cdot \vec{j}(\vec{x}') d\tau' \\
 &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[\nabla' \cdot \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{r} d\tau' - \frac{1}{r} \nabla' \cdot \vec{j}(\vec{x}') \right] d\tau'
 \end{aligned}$$

对于稳恒电流, $\nabla' \cdot \vec{j}(\vec{x}') = 0$ 故有

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \vec{A}(\vec{x}) &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla' \cdot \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{r} d\tau' \\
 &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{r} \cdot d\vec{S}'
 \end{aligned}$$

由于电流应全部包含在积分区域内，因而在边界面上电流密度的法向分量应为零，即得到

$$\nabla \cdot \vec{A}(\vec{x}') = 0$$

再看第二项 $\nabla^2 \vec{A} = ?$

推导

$$\begin{aligned}\nabla^2 \vec{A}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla^2 \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{r} d\tau' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{j}(\vec{x}') \nabla^2 \frac{1}{r} d\tau'\end{aligned}$$

因为

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\vec{r}) = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

所以

$$\begin{aligned}\nabla^2 \vec{A}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{j}(\vec{x}') [-4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}')] d\tau' \\ &= -\mu_0 \int_V \vec{j}(\vec{x}') \delta(\vec{x} - \vec{x}') d\tau' \\ &= -\mu_0 \vec{j}(\vec{x})\end{aligned}$$

最后得到

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{B}(\vec{x}) &= \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \\ &= \mu_0 \vec{j}(\vec{x})\end{aligned}$$

至此，我们得到了静磁场的两个基本方程：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{B}(\vec{x}) = 0 \\ \nabla \times \vec{B}(\vec{x}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{x}) \end{cases}$$

由此方程，我们可以看到

- a) 磁场是无源有旋场，磁力线是闭合的。
- b) 磁场是非保守场，电流激发的磁场是以涡旋形式出现的，与静电场截然不同， $\nabla \times \vec{B}(\vec{x}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{x})$
 $\vec{B}(\vec{x})$ 和 $\vec{j}(\vec{x})$ 是同一点函数，它描述了电流的分布情况， $\nabla \times \vec{B}(\vec{x})$ 起检源作用。
- c) 判断是否稳恒电流，只须从式子出发

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \nabla \cdot \mu_0 \vec{j} = \mu_0 \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

如果上式成立，则有 $\nabla \cdot \vec{j} = 0$ ，根据连续性方程

$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ 可见， $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ 即电荷分布不随时间变化，只有一点，才能说明是稳恒的。

d) 磁感应强度 $\vec{B}$ 可以表示为矢量 $\vec{A}$ 的旋度， $\vec{A}$ 为矢势，稳恒电流激发的磁场的矢势满足如下方程

$$\nabla^2 \vec{A}(\vec{x}) = -\mu_0 \vec{j}(\vec{x}), \quad \text{且} \quad \nabla \cdot \vec{A}(\vec{x}) = 0$$

§ 1.4 麦克斯韦方程组

Maxwell's equations

Maxwell's equations 是建立在 **Coulomb's law**, **Ampere's law**, **Faraday's electromagnetic induction law** 这几个实验定律和**Maxwell**引入的位移电流基础之上的。

1、法拉弟定律 (Faraday's law)

主要论述：变化磁场产生电场。

实验总结：闭合线圈中的感应电动势与通过该线圈内部的磁通量变化率成正比

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

如果闭合线圈是一固定的面，且有

$$\varepsilon = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

又由于感应电场的存在，则

$$\varepsilon = \oint_L \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{l}$$

所以

$$\oint_L \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

即

$$\iint_S (\nabla \times \vec{E}_{\text{感}} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} = 0$$

由于 S 曲面是任意的，要使上式成立，除非是

$$\nabla \times \vec{E}_{\text{感}} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

一般说来，空间任一点的电场总是由两部分组成，
即 $\vec{E} = \vec{E}_{\text{静}} + \vec{E}_{\text{感}}$ ，其中

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E}_{\text{静}} &= \rho / \epsilon_0 \\ \nabla \times \vec{E}_{\text{静}} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{纵场}$$

$\vec{E}_{\text{静}}$ 是指由电荷激发的纵场，所谓纵场是指凡是散度不为零而旋度为零的场。

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E}_{\text{感}} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E}_{\text{感}} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \text{横场}$$

$\vec{E}_{\text{感}}$ 是由变化着的磁场激发的横场，所谓横场是指散度为零而旋度不为零的场。

在一般情况下的场 $\vec{E}$ 由纵场和横场叠加而成，因此， $\vec{E}$ 满足的普遍方程式为

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{静}} + \vec{E}_{\text{感}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \vec{E}(\vec{x}) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{x})}{\partial t} \end{array} \right.$$

2、位移电流 (displacement current)

主要论述：变化电场产生磁场。

由静电磁现象的基本实验定律，我们有如下关系式

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \vec{E} = 0 \end{array} \right\} \text{静止电荷}(\vec{v} = 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \end{array} \right\} \text{运动电荷(稳恒电流 } \vec{v} \neq 0 \quad \dot{\vec{v}} = 0)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{变化磁场产生电场}$$

这些分别都有自己的适用条件和范围，但是从

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

将看到

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

与

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

相违背.

根据电荷守恒定律，则要求

$$\nabla \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

如果承认 电荷守恒定律是普遍成立的，那么
Ampere's law必须作修改.

Maxwell首先看到了这个问题，并从理论上巧妙地解决了，若将

$$\rho = \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}$$

代入连续性方程(电荷守恒定律)，则

推导

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}) \\
&= \nabla \cdot \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

由此可见，只要把Ampere's law中的 $\vec{j}$ 用 $\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ 代替，矛盾就迎刃而解，所以在一般情况下Ampere's law修改为

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \\
&= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}
\end{aligned}$$

式中 $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ 称为位移电流。
$$\vec{j}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

位移电流的引入从另一个侧面深刻揭示了电场和磁场之间的联系：

变化的磁场激发电场，
变化的电场激发磁场，
两者都以涡旋形式激发，
并且左右手旋转对称。

根据以上分析，得到电磁规律的普通形式为

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

真空中的
Maxwell's equations

3、洛伦兹力 (**Lorentz force**)

前面已经指出，一个点电荷 q 在电场 $\vec{E}$ 中所受的力 (Coulomb's force) 为

$$\vec{F}_e = q\vec{E}$$

如果这个点电荷是运动的，并且空间还有磁场

存在，则该电荷既受到电场力的作用，还要受到磁场力的作用（即**Ampere's force**）

$$\vec{F}_m = q \vec{v} \times \vec{B}$$

对于电流元，有

$$Id\vec{l} = \vec{j}d\tau$$

而

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B} = \vec{j}d\tau \times \vec{B}$$

因为 $\vec{j} = nq\vec{v}$ 即得

$$d\vec{F} = nq\vec{v}d\tau \times \vec{B}$$

大家知道，由于变化的电场激发磁场，变化的磁场激发电场，所以在非稳恒条件下，电场和磁场

总是同时存在的，而且不可分割。因而对一个电荷 q 以速度 $\vec{v}$ 运动时，总是同时受到电场和磁场的作用力，即

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

这就是**Lorentz**力，它也是电磁现象的基本规律之一。

如果把它写成力密度的形式，则有

$$\vec{f}_e = \rho \vec{E} \quad , \quad \vec{f}_m = \vec{j} \times \vec{B}$$

从而得到

$$\begin{aligned} \vec{f} &= \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} \\ &= \rho(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \end{aligned}$$

总结: Maxwell's equation 的特点

1、反映一般情况下电荷电流激发的电磁场以及电磁场内部矛盾运动的规律，当 $\rho = 0$ 、 $\vec{j} = 0$ 的区域， $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 通过自身相互激发而运动传播。电磁场的内部矛盾是它存在和运动的主要因素，而 ρ 和 $\vec{j}$ 则以一定形式作用于电磁场。

2、最重要的特点是它揭示了电磁场的内在矛盾和运动，不仅 ρ 和 $\vec{j}$ 可激发电磁场，而且 $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ 、 $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 也可相互激发，因此只要某处发生电磁扰动，电磁场就互相激发，就会在空间传播，形成电磁波。

3、不仅揭示了电磁场的运动规律，更加揭示了电磁场可以独立于电荷，电流之外单独存在。这就加深了我们对电磁场物质性的认识。

§ 1.5 介质的电磁性质

Electromagnetic Property in Medium

根据电磁学的观点，介质是一个带电粒子系统，其内部存在微观电磁场。宏观电动力学(经典电动力学)不是考察个别粒子产生的微观电磁场，而是考察它们的宏观平均值。

由于介质在宏观电磁场的作用下，将被极化和磁化，即出现宏观的附加电荷和电流，这些附加的电荷和电流也要激发电磁场，使原来的宏观电磁场有所改变。所以在介质的极化和磁化过程中，电荷和电场、电流和磁场是互相制约的，介质的内部宏观电磁现象就是这些电荷、电流分布和电磁场之间相互作用的结果。

本节将要研究的是介质在外场作用下可能出现哪些附加电荷和电流。

1、介质的极化 (polarization of dielectric)

介质的极化说明介质对电场的反映，在有电场的情况下，介质中的正负电荷分别受到方向相反的作用力，因此正负电荷间的距离拉开了。另外，那些有极分子在电场作用下按一定方向有序排列，从宏观上来看这两种行为都相当于产生了一个电偶极矩。在电磁学中，曾引进了极化强度矢量：

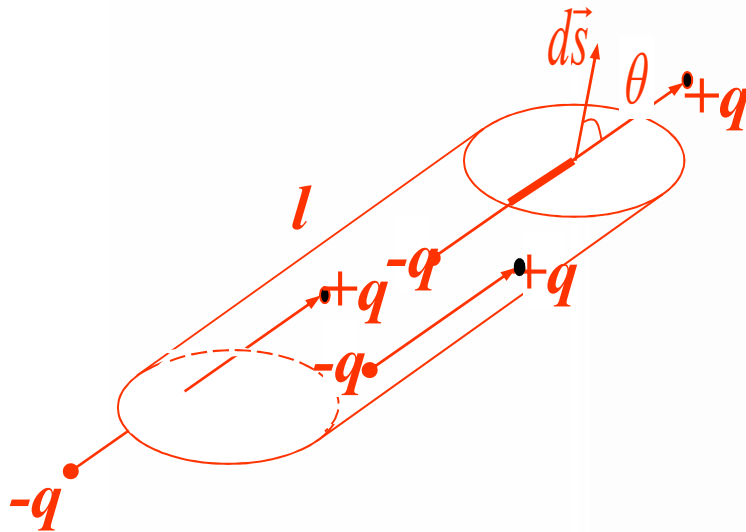
$$\vec{P} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\Delta \tau}$$

其中 $\vec{p}_i$ 是第 i 个分子的电偶极矩，即 $\vec{p}_i = q_i \vec{l}_i$ ，求和是对 $\Delta \tau$ 体积中所有分子进行的。

a) 极化电荷体密度与极化强度的关系

由于极化，正负电荷间发生了相对位移，每处的正负电荷可能不完全抵消，这样就呈现宏观电荷，称之为极化电荷。

若极化时正负电荷拉开的位移为 $\vec{l}$ ，设介质分子密度为 n ，则通过 $d\vec{s}$ 面跑出去的正电荷数目为 $n d\vec{s} \cdot \vec{l}$



$$dQ = qn\vec{l} \cdot d\vec{s} = \vec{P} \cdot d\vec{s}$$

从封闭曲面跑出去的总电荷 $Q = \oiint_S \vec{P} \cdot d\vec{s}$

由于介质是电中性的， $\oiint_S \vec{P} \cdot d\vec{s}$ 也等于 V 内净余的负电荷，即

$$Q_p = -Q = -\oiint_S \vec{P} \cdot d\vec{s}$$

因为 $Q_p = \int_V \rho_p d\tau$

式中 V 是 S 所包围的体积，所以

$$\int_V \rho_p d\tau = -\oiint_S \vec{P} \cdot d\vec{s} = -\int_V \nabla \cdot \vec{P} d\tau$$

即

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}$$

负电荷 $\rightarrow$ 正电荷

b) 极化电流密度与极化强度的关系

当电场随时间改变时，极化过程中正负电荷的相对位移也将随时间改变，由此产生的电流称为极化电流。极化电流和极化电荷也满足连续性方程：

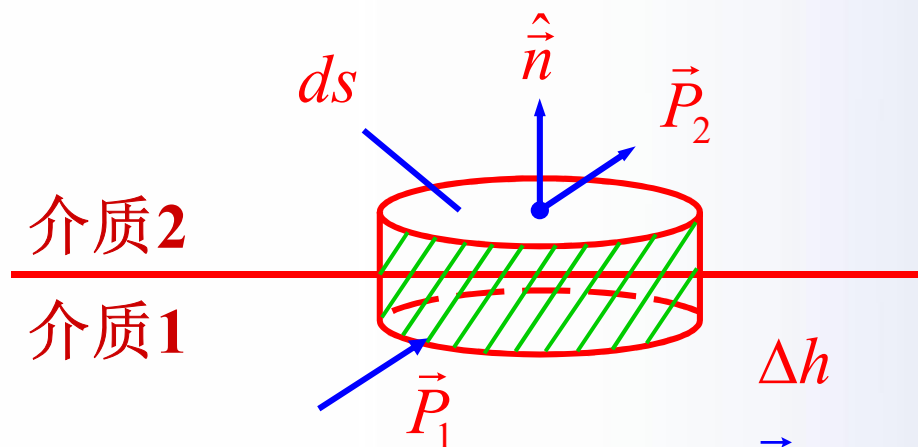
$$\nabla \cdot \vec{j}_p + \frac{\partial \rho_p}{\partial t} = 0$$

即
$$\nabla \cdot \vec{j}_p = -\frac{\partial \rho_p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{P} = \nabla \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

所以
$$\vec{j}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad \text{称为极化电流密度}$$

c) 极化电荷面密度与极化强度的关系

因为在非均匀介质内部，极化后一般出现极化电荷。在均匀介质中，极化电荷只出现在介质界面上。在介质1和介质2分界面上取一个面元为 $d\vec{s}$ ，在分界面两侧取一定厚度的薄层，使分界面包围在薄层内。



通过薄层进入介质2的正电荷为 $\vec{P}_2 \cdot d\vec{s}$ ，由介质1通过薄层下侧面进入薄层的正电荷为 $\vec{P}_1 \cdot d\vec{s}$ 因此薄层出现的净余电荷为

$$dQ_p = -(\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \cdot d\vec{s}$$

以 σ_p 为极化电荷面密度，则有

$$\sigma_p ds = -(\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \cdot d\vec{s} = -(\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \cdot \hat{n} ds$$

得到

$$\sigma_p = -\hat{n} \cdot (\vec{P}_2 - \vec{P}_1)$$

2、介质的磁化 (magnetization of dielectric)

介质的磁化说明介质对磁场的反映, 介质内部分的电子运动构成微观环形电流, 这种环形电流相当于一个磁偶极子。在没有外磁场时, 这些磁矩取向

是无规则的，不呈现宏观电流效应，一旦在外磁场作用下，环形电流出现有规则取向，形成宏观电流效应，这就是磁化现象。

在电磁学中，引入了磁化强度矢量 $\vec{M}$ ，其定义为单位体积内的磁偶极子数，即

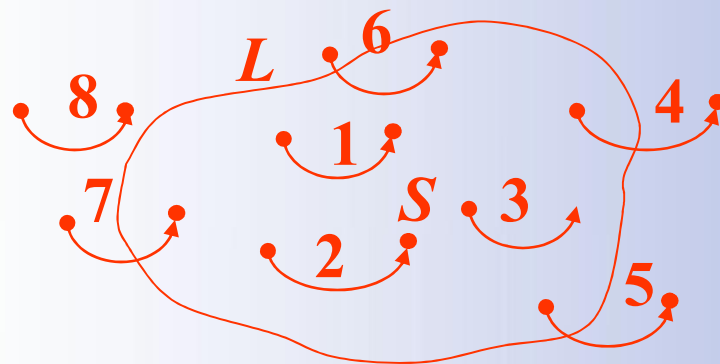
$$\vec{M} = \frac{\sum_i \vec{m}_i}{\Delta \tau}$$

其中 $\vec{m}_i$ 是第 i 个环形电流的磁偶极子，即 $\vec{m}_i = i_i \vec{a}_i$ ， $\vec{a}_i$ 为第 i 个分子环流的面积，求和是对 $\Delta \tau$ 中所有环流进行。

a) 磁化电流密度与磁化强度的关系

由于磁化，引起介质内部环形电流有规则取向，呈现宏观电流效应，这种由磁化引起的电流称为磁化电流。

设 S 为介质内部的一个曲面，其边界线为 L ，环形电流通过 S 面有两种情况：

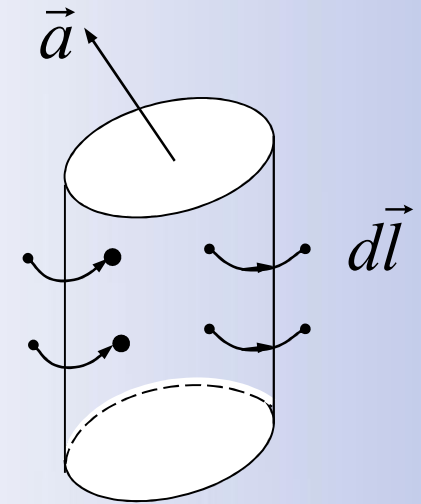


一种是在 S 面中间通过两次的环形电流，为1、2、3，这种电流环对总电流没有贡献；而另一种是在 S 面中间通过一次的环流，如4、5、7，这种电流环对总电流有贡献，但这种情形只能发生在边界上。当然，在 S 面外的电流环8，对总电流同样无贡献。

每一个环形电流贡献为 i 或 $-i$ ，在 S 面上一共有多少这种电流呢？

在边界线 L 上取一线元 $d\vec{l}$ ，设环形电流圈的面积为 $\vec{a}$ ，则

由图可见，若分子中心位于体积元 $\vec{a} \cdot d\vec{l}$ 的柱体内，则该环形电流就被 $d\vec{l}$ 所穿过。因此，若单位体积内分子数为 n ，则被边界线 L 穿过的环形电流数目为



$$\oint_L n \vec{a} \cdot d\vec{l}$$

此数目乘上每个环形电流 i ，即得从 S 背面流向前面的总磁化电流：

$$I_m = \oint_L i n \vec{a} \cdot d\vec{l} = \oint_L \vec{M} \cdot d\vec{l}$$

以 $\vec{j}_m$ 表示磁化电流密度，有

$$\iint_S \vec{j}_m \cdot d\vec{S} = \oint_L \vec{M} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla \times \vec{M}) \cdot d\vec{S}$$

$$\iint_S (\vec{j}_m - \nabla \times \vec{M}) \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\vec{j}_m = \nabla \times \vec{M}$$

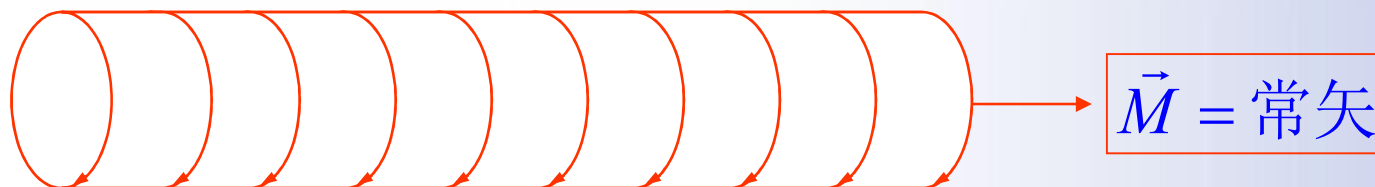
对 $\vec{j}_m$ 两边取散度，得

$$\nabla \cdot \vec{j}_m = 0$$

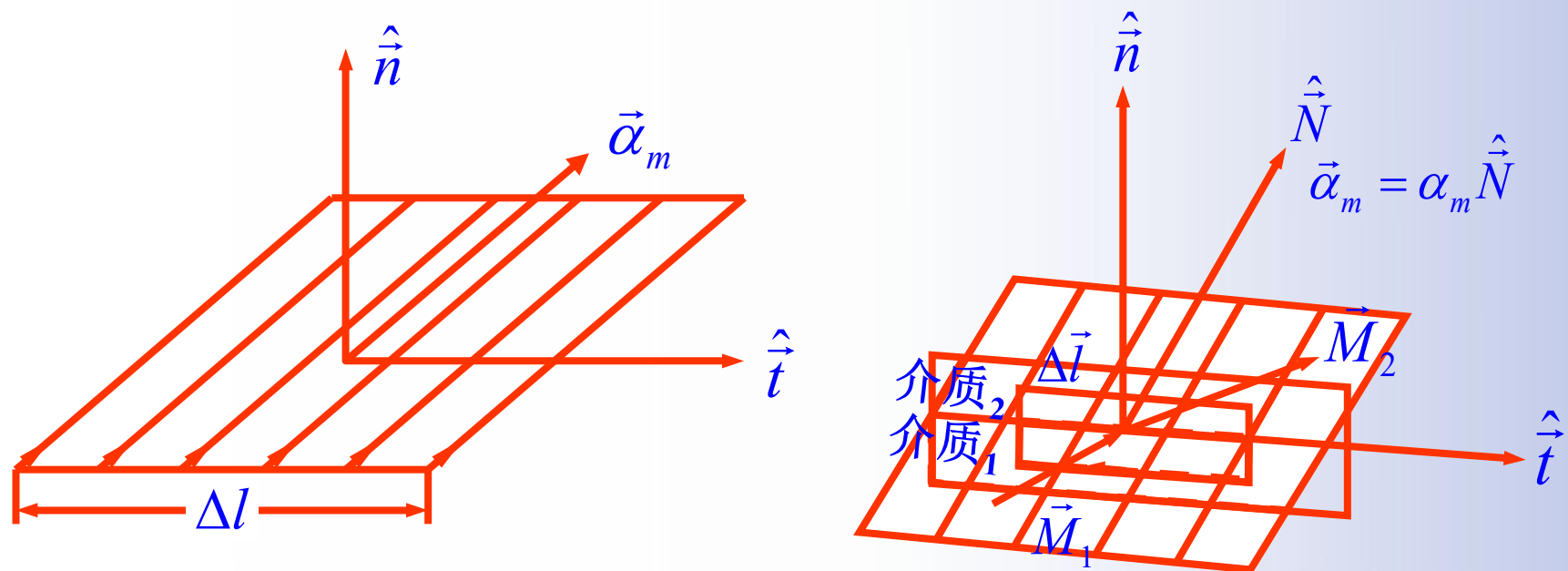
这就说明磁化电流不引起电荷的积累，电流无源头。

b) 磁化电流面密度与磁化强度的关系

对于均匀介质，磁化后介质内部的 $\vec{M}$ 为一常矢量。可见 $\vec{j}_m = \nabla \times \vec{M} = 0$ ，即介质内部 $\vec{j}_m = 0$ 。但表面上却有电流分布。



为此，要引入面电流密度的概念。面电流实际上是靠近表面的相当多分子层内的平均宏观效应，对于薄层厚度趋于零，则通过电流的横截面变为横截线。



现在来看两介质交界面上的磁化电流分布情况。如图所示的回路中，有

$$\oint_L \vec{M} \cdot d\vec{l} = I_m$$

$$\oint_L \vec{M} \cdot d\vec{l} = (\vec{M}_2 - \vec{M}_1) \cdot \Delta l \hat{t}$$

$$I_m = \vec{\alpha}_m \cdot \Delta l \hat{N}$$

$$= \vec{\alpha}_m \cdot \Delta l (\hat{n} \times \hat{t})$$

即

$$\vec{\alpha}_m \cdot (\hat{n} \times \hat{t}) = (\vec{M}_2 - \vec{M}_1) \cdot \hat{t}$$

根据矢量分析

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

则得到

$$\hat{t} \cdot (\vec{\alpha}_m \times \hat{n}) = (\vec{M}_2 - \vec{M}_1) \cdot \hat{t}$$

即

$$\vec{\alpha}_m \times \hat{n} = (\vec{M}_2 - \vec{M}_1)$$

又因为

$$\begin{aligned} \hat{n} \times (\vec{\alpha}_m \times \hat{n}) &= (\hat{n} \cdot \hat{n}) \vec{\alpha}_m - \hat{n} (\hat{n} \cdot \vec{\alpha}_m) \\ &= \vec{\alpha}_m \end{aligned}$$

故得到

$$\vec{\alpha}_m = \hat{n} \times (\vec{M}_2 - \vec{M}_1)$$

3、介质中的方程组 (equations in medium)

由上述讨论可知，介质存在时空间电荷包括自由电荷和极化电荷，即

$$\rho = \rho_f + \rho_p = \rho_f - \nabla \cdot \vec{P}$$

介质中出现的电流有传导电流(自由电流)、极化电流、磁化电流。

即

$$\vec{j} = \vec{j}_f + \vec{j}_p + \vec{j}_m = \vec{j}_f + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \nabla \times \vec{M}$$

因此，在介质存在的情况下，**Maxwell's equations**应修改为：

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho_f - \nabla \cdot \vec{P}) \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{j}_f + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \nabla \times \vec{M}) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

若令

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

则得到

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{D} = \rho_f \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right.$$

4、电磁性质方程 (electromagnetic property equ's)

宏观Maxwell's equations是包含有 $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}$ 这四个场量。显然在导入量 $\vec{E}, \vec{D}$ 与 $\vec{B}, \vec{H}$ 之间的关系尚未确定之前是无法求出方程组的解。这些关系隐含在

$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ 和 $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$ 之中，一般说来 $\vec{D} = \vec{D}(\vec{E}, \vec{B})$

$\vec{H} = \vec{H}(\vec{E}, \vec{B})$ ，它们的函数关系视各种介质的性质而定，所以必须引入一些关系来反映介质电磁性质，这些关系常称为介质的电磁性质方程。或者称为介质的电磁性质的本构关系。

大多数物质在场强不是很强的情况下，介质对场的反应是线性的。尤其在各向同性的物质内，线性关系写成简单的比例关系：

$$\begin{aligned}\vec{P} &= \chi \varepsilon_0 \vec{E} , & \vec{D} &= \varepsilon \vec{E} \\ \vec{M} &= \chi_m \vec{H} , & \vec{B} &= \mu \vec{H}\end{aligned}$$

其中 $\chi, \varepsilon, \chi_m, \mu$ 都是比例常数，通常分别被称为极化率、介电常数、磁化率和导磁系数(磁导率)。

将电磁性质方程与 $\vec{D}, \vec{H}$ 的定义式比较，有

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r, \quad \varepsilon_r = 1 + \chi$$

$$\mu = \mu_0 \mu_r, \quad \mu_r = 1 + \chi_m$$

式中 ε_r 称为相对介电常数， μ_r 称为相对导磁系数。

在导电物质中，有

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

σ 称为电导率，因此，电磁性质方程的

$$\begin{cases} \vec{D} = \epsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \\ \vec{j} = \sigma \vec{E} \end{cases}$$

应当指出，在高频情况下，由于场变化很快，以致于极化电荷和磁化电流跟不上场的变化，所以极化率和磁化率都将是场变化频率 ω 的函数，即 $\epsilon = \epsilon(\omega)$, $\mu = \mu(\omega)$ 。其次在铁电和铁磁物质或强场情况下， $\vec{P}$ 与 $\vec{E}$, $\vec{M}$ 与 $\vec{H}$ 之间将不再是齐次线性关系。另外，对于各向异性的介质来说，介电常数和导磁系数都是张量，场强和感应场强之间的关系推广为

$$D_i = \varepsilon_{ij} E_j, \quad B_i = \mu_{ij} H_j, \quad i, j = 1, 2, 3$$

对于导电介质来说，有推广的欧姆定律：

$$j_i = \sigma_{ij} E_i$$

因此，要注意电磁性质方程的适用范围。

§ 1.6 电磁场边值关系

Boundary Conditions of Electromagnetic Field

在电动力学中，我们关心的场量 $\vec{E}$ 、 $\vec{B}$ 是一个矢量，要想确定区域 V 中的 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ ，必须知道 V 中每一点 $\vec{E}$ 、 $\vec{B}$ 的散度和旋度，以及在边界面上的法线分量 E_n 、 B_n 。本节主要是讨论两种不同介质的分界面上 **Maxwell's equations** 的形式，亦即电磁场边值关系。

大家知道，由于在外场作用下，介质分界面上一般出现一层束缚电荷和电流分布，这些电荷、电流的存在又使得界面两侧场量发生跃变，这种场量跃

变是面电荷、面电流激发附加的电磁场产生的，**描述在两介质分界面上，两侧场量与界面上电荷、电流的关系，是本节的主要讨论内容。**

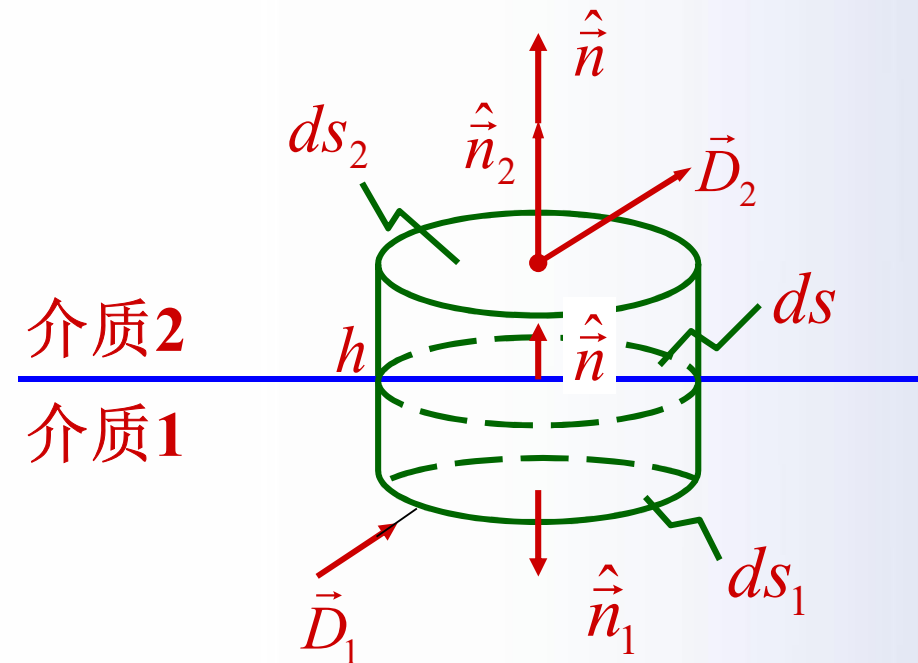
然而，微分形式的**Maxwell's equations**不能应用到两介质的界面上，这是因为**Maxwell's equations**对场量而言，是连续、可微的。只有积分形式的**Maxwell's equations**才能应用到两介质的分界面上，这是因为积分形式的**Maxwell's equations**对任意不连续的场量适合。因此研究边值关系的基础是积分形式的**Maxwell's equations**:

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \\ \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_f + \frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} \\ \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_f \\ \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \end{array} \right.$$

1、法向分量的跃变 (discontinuity of normal component)

如图所示，在分界面处作一个小扁平匣，匣的上下底面 ds_1 , ds_2 分别位于界面的两侧，且 ds_1 , ds_2 , ds

三个面元平行，大小相等， ds 为界面上被截出的面元，匣的高度 $h \rightarrow 0$ ，用 $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_f$ 求矢量 $\vec{D}$ 通过匣表面的通量。



由于匣的高度 $h \rightarrow 0$ ，所以通过侧面的 $\vec{D}$ 的通量可以忽略不计，因此

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = \iint_{S_1} \vec{D}_1 \cdot d\vec{s}_1 + \iint_{S_2} \vec{D}_2 \cdot d\vec{s}_2 + \iint_{S_{\text{侧}}} \vec{D} \cdot d\vec{s}_{\text{侧}}$$

$$= (\vec{D}_1 \cdot \hat{n}_1 + \vec{D}_2 \cdot \hat{n}_2) ds$$


由于 $\hat{n}_1 = -\hat{n}$, $\hat{n}_2 = \hat{n}$, 即得

$$(\vec{D}_1 \cdot \hat{n}_1 + \vec{D}_2 \cdot \hat{n}_2) ds = \sigma_f ds$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_f$$

或者

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_f$$

其中 σ_f 是界面上的自由电荷 面密度, D_{1n} 及 D_{2n} 分别为

界面两侧的电位移矢量 $\vec{D}$ 在面法线上的分量， $\hat{n}$ 的方向由介质1指向介质2。

根据 $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ 的关系，不难得到

$$\epsilon_2 E_{2n} - \epsilon_1 E_{1n} = \sigma_f$$

讨论： **a)** 对于两种电介质的分界面 $\sigma_f = 0$ ，则得

$$D_{2n} = D_{1n} \rightarrow \text{连续, 无跃变}$$

$$\frac{E_{2n}}{E_{1n}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \rightarrow \text{不连续, 有跃变}$$

b) 只有导体与介质交界面上，存在 $\sigma_f \neq 0$ 。这时 $\vec{D}$ 、 $\vec{E}$ 在法线上都不连续，有跃变。

c) 对于磁场 $\vec{B}$ ，把 $\oiint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$ 应用到边界上的扁平匣区域上，同理得到^s

$$\hat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$$

即 $B_{2n} = B_{1n} \rightarrow$ 连续, 无跃变

由于 $\vec{B} = \mu\vec{H}$ ，不难找到：

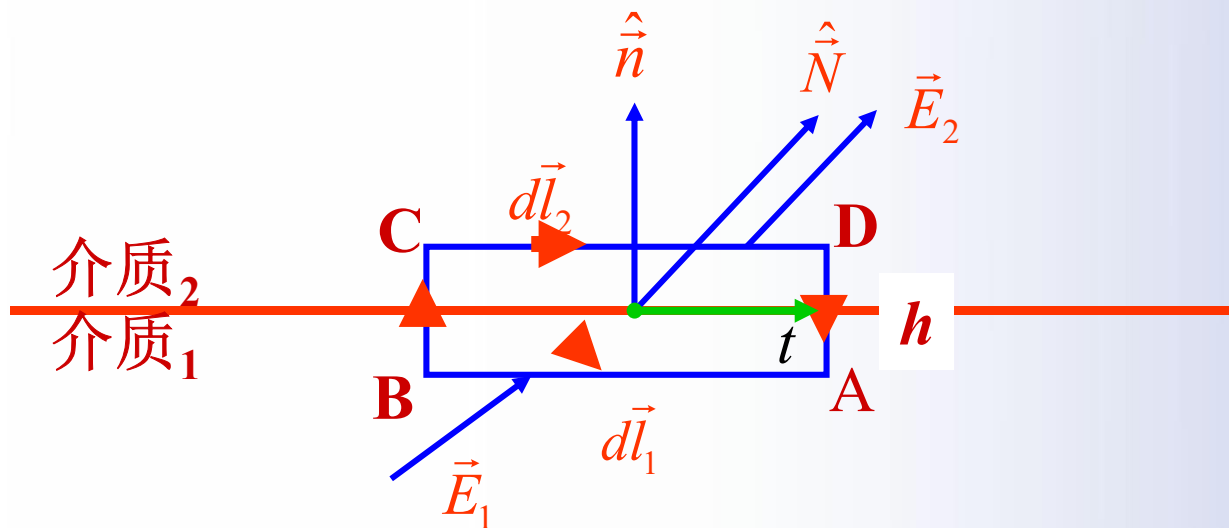
$$\mu_2 H_{2n} = \mu_1 H_{1n}$$

$$\frac{H_{2n}}{H_{1n}} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \rightarrow \text{不连续, 有跃变}$$

这就说明：在分界面上， $\vec{B}$ 的法线分量是连续的， $\vec{H}$ 的法线分量是不连续的，除非 $\mu_1 = \mu_2$ 。

2、切向分量的跃变(discontinuity of tangential component)

平行边界作一小扁回路，并令此回路与分界面正交且其长边与界面平行。由于回路短边 $h \rightarrow 0$ ，所以 $\vec{E}$ 对回路的环流为：



$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \vec{E}_1 \cdot \Delta\vec{l}_1 + \vec{E}_2 \cdot \Delta\vec{l}_2$$

$$= (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \hat{t} \Delta l$$

而

$$-\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{N} \Delta l h$$

故得

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \hat{t} \Delta l = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{N} \Delta l h$$

可见

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \hat{t} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{N} h$$

这里 $\hat{t} = \hat{N} \times \hat{n}$ ，则

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot (\hat{N} \times \hat{n}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{N}h$$

根据矢量分析：

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

$$\hat{N} \cdot [\hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1)] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{N}h$$

即

$$\hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} h$$

由于 $h \rightarrow 0$ ，而 $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 为有限值，故得到

$$\hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$$

亦即 $E_{2t} = E_{1t}$. $\rightarrow$ 连续, 无跃变.

但根据 $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, 有

$$\varepsilon_1 D_{2t} = \varepsilon_2 D_{1t}$$

$$\frac{D_{2t}}{D_{1t}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \rightarrow \text{不连续, 有跃变.}$$

这说明: 在分界面上, $\vec{E}$ 的切线分量是连续的, $\vec{D}$ 切线分量不连续。

对于磁场 $\vec{H}$, 则根据 $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_f + \frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{s}$

则

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \vec{H}_1 \cdot \hat{t}_1 \Delta l + \vec{H}_2 \cdot \hat{t}_2 \Delta l = (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \cdot \hat{t} \Delta l$$

而 $I_f = j_f S = j_f h \Delta l = \alpha_f \Delta l$

$$\frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{s} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \Delta l h \hat{\vec{N}}$$

由于 $S \rightarrow 0$ ，而 $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ 为有限值，则

$$\frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = 0$$

所以

$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \cdot \hat{\vec{t}} \Delta l = \alpha_f \Delta l$$

即

$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \cdot \hat{\vec{t}} = \alpha_f$$

或者

$$H_{2t} - H_{1t} = \alpha_f$$

又由于 $\Delta \vec{l} = \Delta l \hat{t}$ 为界面上的任一矢量，因此

$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \cdot \hat{t} = (\vec{\alpha}_f \times \hat{n}) \cdot \hat{t}$$

$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{\alpha}_f \times \hat{n}$$

因为 $\hat{n} \times (\vec{\alpha}_f \times \hat{n}) = (\hat{n} \cdot \hat{n})\vec{\alpha}_f - (\hat{n} \cdot \vec{\alpha}_f)\hat{n} = \vec{\alpha}_f$

故得

$$\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{\alpha}_f$$

导体存在时，表面上的 $\vec{\alpha}_f$ 才不为零。通常介质界面上 $\vec{H}$ 矢量的切向分量是连续的。

综上所述，电磁场的边值关系为

$$\begin{cases} \hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \\ \hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{\alpha}_f \\ \hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_f \\ \hat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \end{cases}$$

由此可见，边值关系表示界面两侧的场与界面上电荷之间的制约关系，实质上，边值关系是边界上的场方程。由于实际问题往往含有几种介质以及导体等，因此，边值关系是十分重要的。

§ 1.7 电磁场的能量和能流

Energy and Energy Flow of Electromagnetic Field

电磁场是一种物质，它具有内部运动。电磁场的运动和其他物质运动形式相比有它的特殊性一面，但同时也有普遍性的一面。即电磁场运动和其他物质运动形式之间能够互相转化。

本节先用电磁场运动的基本规律——Maxwell's equations 和 Lorentz 力密度公式 讨论电磁现象中能量转换和守恒定律的表现形式，从而求出电磁场能量和能流。

1、电磁场的能量守恒和转化定律

Law of Conservation and Transform of Energy of Electromagnetic Field

我们讨论电磁场能量问题，是以功和能的关系、能量守恒原理和代表电磁现象普遍规律的**Maxwell's equations** 和**Lorentz**力密度公式为依据的。求电磁场的能量，是通过电磁场和带电物体相互作用过程中，电磁场的能量和带电物体运动的机械能相互转化来进行的。为此，我们研究运动的带电物体受电磁场的作用而引起的总机械能量的变化。

假设有一带电体，其电荷体密度为 ρ ，在电磁场作用下运动。由于磁场作用在运动带电物体上的力总与带电物体位移的方向垂直，磁场对带电体不作功。所以只需求电场对带电体所做的功即可。

在 dt 时间内，体积元 $d\tau$ 中的电荷 $\rho d\tau$ 发生的位移为 $d\vec{l} = \vec{v}dt$ ， $\vec{v}$ 为带电物体体积元 $d\tau$ 的运动速度。于是电磁场对 $\rho d\tau$ 所做的功，根据**Lorentz**力密度公式，即

$$\begin{aligned}dW &= \vec{F} \cdot d\vec{l} \\&= \rho d\tau (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} dt \\&= \rho d\tau \vec{E} \cdot \vec{v} dt \\&= \vec{j} \cdot \vec{E} dt d\tau\end{aligned}$$

其中因为 $(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0$ 。因此在 dt 时间内，电磁场对整个空间中传导电流（运动带电物体）所作的功为：

$$W = \int_V \vec{E} \cdot \vec{j} d\tau dt$$

电磁场对带电物体做功增加了带电物体的机械能 $U_{\text{机}}$ ，故

$$\frac{dU_{\text{机}}}{dt} = \int_V \vec{E} \cdot \vec{j} d\tau$$

现将式中的 $\vec{j}$ 用场量表示，根据 **Maxwell's equations**，可知

推导

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \vec{j} = \nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

从而有

$$\vec{E} \cdot \vec{j} = \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

考虑对称性，因为 $\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ ，故

$$\vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

将此两式相减，从而得到

$$\begin{aligned} \vec{E} \cdot \vec{j} &= \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ &= \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) - \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned}$$

利用矢量场论公式

$$\nabla \cdot (\vec{f} \times \vec{g}) = \vec{g} \cdot (\nabla \times \vec{f}) - \vec{f} \cdot (\nabla \times \vec{g})$$

于是上式右边的第一、二项为

$$\vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) - \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) = -\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H})$$

上式右边第三、四项为

$$\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} w$$

从而得到

$$\vec{E} \cdot \vec{j} = -\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) - \frac{\partial w}{\partial t}$$

令

$$\begin{aligned}\vec{S} &= \vec{E} \times \vec{H} \\ w &= \frac{1}{2}(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B})\end{aligned}$$

其中 $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$

故得

$$\vec{E} \cdot \vec{j} = -\nabla \cdot \vec{S} - \frac{\partial}{\partial t} w$$

从而得到

$$\begin{aligned}\frac{dU_{\text{机}}}{dt} &= \int_V \left[-\nabla \cdot \vec{S} - \frac{\partial}{\partial t} w \right] d\tau \\ &= -\oint_S \vec{S} \cdot d\vec{s} - \frac{d}{dt} \int_V w d\tau\end{aligned}$$

现在来看上式每一项的物理意义：

当积分区域为整个空间时，面积 S 在无穷远处，由于电荷，电流都集中在有限区域，所以在无穷远处电磁场皆为零，故上式面积分项为零，于是得到

$$\frac{dU_{\text{机}}}{dt} = - \frac{d}{dt} \int_{\infty \text{全空间}} w d\tau$$

这表明，带电体的机械能 $U_{\text{机}}$ 的增加值等于 $\int_{\infty} w d\tau$ 的减少值，如果令

$$U_{\text{电磁}} = \int_{\infty} w d\tau$$

则 w 为电磁能量密度，即有

$$\frac{d}{dt}(U_{\text{机}} + U_{\text{电磁}}) = 0$$

得

$$U_{\text{机}} + U_{\text{电磁}} = \text{常数}$$

该式说明：体系的机械能不守恒，电磁能也不守恒，而两者之和才是一个守恒量。带电体和电磁场互相交换能量，它表示的是电磁场和带电体系的能量独立和转化定律。

2、电磁场的能流密度

Energy Flux Density of Electromagnetic Field

当我们只考虑关系式

$$\frac{dU_{\text{机}}}{dt} = -\oiint_S \vec{S} \cdot d\vec{s} - \frac{d}{dt} \int_V w d\tau$$

中积分区域为某局部区域时，则 V 为有限空间。它的包面 S 也就不在无穷远处， S 上的电磁场皆不为零，所以

$$\frac{dU_{\text{机}}}{dt} + \frac{d}{dt} \int_V w d\tau = -\oiint_S \vec{S} \cdot d\vec{s}$$

左为第一项 $\frac{dU_{\text{机}}}{dt}$ 表示体积 V 内带电体的机械能的增加，

左边第二项 $\frac{d}{dt} \int_V w d\tau$ 代表体积 V 内的电磁场能量的

增加，因此右边的项也必然代表能量的意义。由于

它是面积分，所以我们把它解释为单位时间内从体积 V 的表面流进体积 V 中的电磁场能量。因此把

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

称为电磁场能流密度矢量，也叫玻印亭矢量，即 (Poynting 矢量)。

通常把

$$\frac{dU_{\text{机}}}{dt} = -\oiint_S \vec{S} \cdot d\vec{s} - \frac{d}{dt} \int_V w d\tau$$

称为**Poynting**定理

由上述可以看到， $\vec{S}$ 与 w 这两个量的存在，说明了电磁场不仅有能量而且此能量还在流动，在空间中传播。

3、电磁场能量的传播

Propagation of energy of electromagnetic field

以往，只注重解电路方程而忽视了电磁能量在场中的传播的实质。事实上，在稳恒电流或低频交流

电的情况下，电磁能量也是在场中传播的。在电路中，物理系统的能量包括导线内部电子运动的动能和导线周围空间中的电磁场能量。

先看电子运动的动能。导线内的电流密度为

$$\vec{J} = \sum e \vec{v} = ne \vec{v}$$

一般金属导体内有 $n \sim 10^{23}/\text{cm}^3$ ，对 $1\text{A}/\text{mm}^2$ 的电流密度来说，且 $J = 10^6\text{A}/\text{m}^2$ ，电子电荷 $e \sim 1.6 \times 10^{-19}\text{C}$ ，得到电子运动平均漂移速度 $\vec{v} \sim 6 \times 10^{-5}\text{m/s}$ ，由此可见，电子运动速度之小，相应地动能也很小。因此电子运动的能量决不是供给负载上消耗的能量。

再看电磁场能量。我们知道，电磁场是以光速传播的，电磁能流是经由传输线附近的**空间以光速流向用户**，传输线的作用是在电磁场的作用下产生较强的电流和电荷分布，从而使传输线附近的**空间形成较强的电磁场和电磁能流的通道**。能量不是经由导线内的电子传送的，这一点完全可以由这一事实来回答：**在有限距离里，当闸刀一合上，所有的用电器同时通以电流**。

电磁场在传输过程中，一部分能量进入导线内部变为焦耳热损耗。在负载上，能量流入电阻并被消耗。

1.6节主要内容回顾

1. 电极化

极化电荷密度与极化强度之间关系

$$\int_V \rho_p d\tau = -\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{s} \quad \text{积分形式}$$

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} \quad \text{微分形式}$$

极化电流密度与极化强度之间关系

$$\vec{j}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad \text{根据电荷守恒定律推导得}$$

极化电荷面密度与极化强度之间关系

$$\int \sigma_p dS = \int -(\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \cdot d\vec{S} \quad \underline{\text{整体}}$$

$$\sigma_p = -\hat{n} \cdot (\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \quad \underline{\text{微观}}$$

2. 磁化

磁化电流密度与磁化强度之间关系

$$\iint_S \vec{j}_m \cdot d\vec{S} = \oint_L \vec{M} \cdot d\vec{l} \quad \underline{\text{积分形式}}$$

$$\vec{j}_m = \nabla \times \vec{M} \quad \underline{\text{微分形式}}$$

磁化电流面密度与磁化强度之间关系

$$\oint_L \vec{M} \cdot d\vec{l} = I_m \quad \text{整体}$$

$$\vec{\alpha}_m = \hat{n} \times (\vec{M}_2 - \vec{M}_1) \quad \text{微观}$$

3. 介质中电荷、电流

电磁场中的介质中电荷密度和电流密度

$$\rho = \rho_f + \underline{\rho_p} = \rho_f - \underline{\nabla \cdot \vec{P}}$$

$$\vec{j} = \vec{j}_f + \underline{\vec{j}_p} + \underline{\vec{j}_m} = \vec{j}_f + \underline{\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}} + \underline{\nabla \times \vec{M}}$$

4. 介质中 Maxwell's Equations

与真空中Maxwell's Equations相比较,用介质中电荷密度、电流密度将真空中的电流密度与电荷密度代替即可。

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_f - \nabla \cdot \vec{P}) \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{j}_f + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \nabla \times \vec{M}) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

5. 介质中电磁性

介质的电磁性质方程

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{D} = \epsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \\ \vec{j} = \sigma \vec{E} \end{array} \right.$$

介质中Maxwell's Equations可简化为

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{D} = \rho_f \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right.$$

1.7节主要内容回顾

能量守恒定律

$$\frac{dU_{\text{机}}}{dt} = -\oint_S \vec{S} \cdot d\vec{s} - \frac{d}{dt} \int_V w d\tau$$

能量密度和能流密度

$$w = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B})$$

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

本章主要内容

二、几个基本定律

1、电荷守恒定律

$$\oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho d\tau$$

积分

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

微分

2、库仑定律

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_1} \int_{V_2} \frac{\rho_1 \rho_2}{r^3} \vec{r} d\tau_1 d\tau_2$$

3、安培定律

$$\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times (I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{21})}{r_{21}^3}$$

4、毕奥——萨伐尔定律

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_L \frac{I' d\vec{l}' \times \vec{r}}{r^3}$$

5、法拉第定律

$$\oint_L \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

6、洛仑兹力

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

整体

$$\vec{f} = \rho(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

微观

二、麦克斯韦方程组

1、真空中静电场

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho d\tau$$

积分

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{x})$$

微分

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{x}) = 0$$

微分

2、真空中静磁场

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{x}) = 0$$

微分

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{x}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{x})$$

微分

3、真空中麦克斯韦方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

微分

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \\ \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I \\ \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho dv = \frac{Q}{\varepsilon_0} \\ \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \end{array} \right.$$

积分

4、介质中麦克斯韦方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{D} = \rho_f \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right.$$

微分

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \\ \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_f + \frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} \\ \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_f \\ \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \end{array} \right.$$

积分

5、边界麦克斯韦方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\vec{n}} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \\ \hat{\vec{n}} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{\alpha}_f \\ \hat{\vec{n}} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_f \\ \hat{\vec{n}} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \end{array} \right.$$

三、几个关系式和物理量

1、介质中电磁性方程

$$\begin{cases} \vec{D} = \epsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \\ \vec{j} = \sigma \vec{E} \end{cases}$$

2、能量密度和能流密度

$$w = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B})$$

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$