第五章　电磁波的辐射

Electromagnetic Wave Radiation

本章所研究的问题是电磁波的辐射。方法和稳恒场情况一样，当考虑由电荷、电流分布激发电磁场的问题时，引入势的概念来描述电磁场比较方便。

本章首先把势的概念推广到一般变化电磁场情况，然后通过势来解辐射问题。

本章主要内容

电磁场的矢势和标势

推迟势

电偶极辐射

电磁波的干涉和衍射

电磁场的动量

§5.1 电磁场的矢势和标势

Vector and Scalar Potential of Electromagnetic

1、用势$\vec{A},\varphi$描述电磁场

为简单起见，讨论真空中的电磁场：

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{D}=\rho \\ \nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\vec{B}=0 \\ \nabla\times\vec{H}=\vec{j}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}\,,\quad \vec{B}=\mu_0\vec{H}\ .}$$

针对磁场

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

引入

$$\boxed{\vec{B} = \nabla \times \vec{A}}$$

$\vec{A}$的物理意义可由下式看出：

$$\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

即在任一时刻，矢量$\vec{A}$沿任一闭合回路***L***的线积分等于该时刻通过以***L***为边线的曲面***S***的磁通量。

对于电场 $\vec{E}$ 不能像静电场那样直接引入电势。由**Faraday**电磁感应定律可得：

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{A})=-\nabla\times\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\boxed{\nabla\times\left(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=0}$$

$$\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\nabla\varphi \longrightarrow$$

是标势不是静电势

即

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$$

电磁场和势之间的关系如下

$$\boxed{\begin{cases} \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \\ \vec{E} = -\nabla\varphi - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{cases}}$$

注意：

a) 当 $\vec{A}$ 与时间无关，即 $\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0$ 时,且 $\vec{E} = -\nabla\varphi$

这时 φ 就直接归结为电势；

b) 绝对不要把 $\vec{E}=-\nabla\varphi-\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ 中的标势 φ 与电势 $\varphi(\vec{E}=-\nabla\varphi)$ 混为一谈。因为在非稳恒情况下，$\vec{E}$ 不再是保守力场，不存在势能的概念，这就是说现在的 φ，在数值上不等于把单位正电荷从空间一点移到无穷远处电场力所做的功。为了区别于静电场的电势，把这里的 φ 称为标势（**Scalar potential**)。

c) 在时变场中，磁场和电场是相互作用着的整体，必须把矢势 $\vec{A}$ 和标势 φ 作为一个整体来描述电磁场。

2、规范变换和规范不变性

虽然 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$，以及 $\vec{A}$ 和 φ 是描述电磁场的两种等价的方式，但由于 $\vec{E}$、$\vec{B}$ 和 $\vec{A}$、φ 之间是微分方程的关系，所以它们之间的关系不是一一对应的，这是因为矢势 $\vec{A}$ 可以加上一个任意标量函数的梯度，结果不影响 $\vec{B}$，而这个任意标量函数

的梯度对 $\vec{E}$ 要发生影响，但将 $\vec{E}=-\nabla\varphi-\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}$

中的 φ 与此融合也作相应的变换，则仍可使 $\vec{E}$ 保持不变。

设ψ为任意的标量函数，即$\psi=\psi(\vec{x},t)$，作下述变换式：

$$\begin{cases} \vec{A}\rightarrow\vec{A}'=\vec{A}+\nabla\psi \\ \varphi\rightarrow\varphi'=\varphi-\dfrac{\partial\psi}{\partial t} \end{cases}$$

于是我们得到了一组新的 $\vec{A}'$. φ' ，很容易证明：

$$\nabla\times\vec{A}'=\nabla\times(\vec{A}+\nabla\psi)=\nabla\times\vec{A}+\nabla\times(\nabla\psi)$$

$$=\nabla\times\vec{A}=\vec{B}$$

$$-\nabla\varphi'-\frac{\partial\vec{A}'}{\partial t}=-\nabla(\varphi-\frac{\partial\psi}{\partial t})-\frac{\partial}{\partial t}(\vec{A}+\nabla\psi)$$

$$=-\nabla\varphi+\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\psi)-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\psi)$$

$$=-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=\vec{E}$$

由此可见，$(\vec{A}'.\ \varphi')$ 和 $(\vec{A}.\ \varphi)$ 描述同一电磁场。

a) 库仑规范(Coulomb gauge)

库仑规范条件为$\nabla\cdot\vec{A}=0$，即规定$\vec{A}$是一个有旋无源场（横场）。这个规范的特点是$\vec{E}$的纵场部分完全由φ描述（即$-\nabla\varphi$具有无旋性)，横场部分由$\vec{A}$描述（即$\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$具有无源性）。由

$$\vec{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

可见，$-\nabla\varphi$项对应库仑场$\vec{E}_{库}$，$-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$对应着感应

场$\vec{E}_{感}$ 。

b) 洛仑兹规范(Lorentz gauge)

洛仑兹规范条件为 $\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{C^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$ ，即规定 $\vec{A}$ 是一个有旋有源场（即 $\vec{A}$包含横场和纵场两部分），这个规范的特点是把势的基本方程化为特别简单的对称形式。

3、达朗贝尔(d' Alembert)方程

从Maxwell's equations

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \vec{E} = -\nabla \varphi - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{cases} \qquad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$$

出发推导矢势 $\vec{A}$和标势 φ 所满足的方程，得到：

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{A} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla(\nabla \cdot \vec{A} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}) = -\mu_0 \vec{j} \\ \nabla^2 \varphi + \dfrac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \vec{A} = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \end{cases}$$

a) 采用库仑规范 $(\nabla\cdot\vec{A}=0)$

上述方程化为

$$\boxed{\begin{cases}\nabla^2\varphi=-\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\\[2ex]\nabla^2\vec{A}-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial}{\partial t}(\nabla\varphi)=-\mu_0\vec{j}\end{cases}}$$

b) 采用洛仑兹规范($\nabla\cdot\vec{A}+\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}=0$**)**

上述方程化为

$$\boxed{\begin{cases} \nabla^2\varphi - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\[2ex] \nabla^2\vec{A} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{j} \end{cases}}$$

这就是所谓达朗贝尔（ **d’ Alembert** ）方程。

4、举例讨论

试求单色平面电磁波的势

Solution:

单色平面电磁波在没有电荷，电流分布的自由空间中传播，因而势方程（达朗贝尔方程在Lorentz规范条件下）变为波动方程：

$$\begin{cases} \nabla^2\varphi - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2\vec{A} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

其解的形式为：

$$\begin{cases} \varphi = \varphi_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} \\ \vec{A} = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} \end{cases}$$

由**Lorentz**规范条件 $\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$，即得

$$i\vec{k}\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}(-i\omega\varphi)=0$$

$$\varphi=\frac{c^2}{\omega}\vec{k}\cdot\vec{A}$$

这表明，只要给定了 $\vec{A}$ ，就可以确定单色平面电磁波，这是因为：

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = i\vec{k} \times \vec{A} = i\vec{k} \times (\vec{A}_{横} + \vec{A}_{纵})$$

$$= i\vec{k} \times \vec{A}_{横} + i\vec{k} \times \vec{A}_{纵}$$

$$= i\vec{k} \times \vec{A}_{横}$$

0（对于单色平面波而言）

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -i\vec{k}\varphi + i\omega\vec{A}$$

$$= -i\vec{k}\left(\frac{c^2}{\omega}\vec{k} \cdot \vec{A}\right) + i\omega\vec{A}$$

$$= -i\frac{c^2}{\omega}\left[\vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{A}) - k^2\vec{A}\right]$$

$$= -i\frac{c^2}{\omega}\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{A})$$

$$=-\frac{c^2}{\omega}\vec{k}\times\vec{B}$$

$$=-c\hat{\vec{n}}\times\vec{B}$$

如果取 $\vec{A}=\vec{A}_{横}$ ，即只取 $\vec{A}$ 具有横向分量，那么有

$$\vec{k}\cdot\vec{A}=\vec{k}\cdot\vec{A}_{横}=0$$

从而得到：

$$\varphi=\frac{c^2}{\omega}\vec{k}\cdot\vec{A}=0$$

因此有：

$$\begin{cases} \vec{B} = \nabla \times \vec{A} = i\vec{k} \times \vec{A} = i\vec{k} \times \vec{A}_{横} \\ \vec{E} = -\nabla \varphi - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} = i\omega \vec{A} = i\omega \vec{A}_{横} \end{cases}$$

其中： $(\vec{k} \cdot \vec{A} = 0)$

如果采用库仑规范条件，势方程在自由空间中变为

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi = 0 \\ \nabla^2 \vec{A} - \dfrac{1}{c^2} \dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \dfrac{1}{c^2} \dfrac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi = 0 \end{cases}$$

当全空间没有电荷分布时，库仑场的标势 $\varphi = 0$ ，则只有

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0$$

其解的形式为

$$\vec{A} = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)}$$

由库仑规范条件得到

$$\nabla \cdot \vec{A} = i\vec{k} \cdot \vec{A} = 0$$

即保证了 $\vec{A}$ 只有横向分量，即 $\vec{A} = \vec{A}_{横}$ ，从而得到

$$
\begin{cases}
\vec{B}=\nabla\times\vec{A}=i\vec{k}\times\vec{A}=i\vec{k}\times\vec{A}_{横} \\
\vec{E}=-\nabla\varphi-\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}=i\omega\vec{A}=i\omega\vec{A}_{横}
\end{cases}
\qquad (\nabla\cdot\vec{A}=0)
$$

通过例子可看到：

库仑规范的优点是：它的标势 φ 描述库仑作用，可直接由电荷分布 ρ 求出，它的矢势 $\vec{A}$ 只有横向分量，恰好足够描述辐射电磁波的两种独立偏振。

洛仑兹规范的优点是：它的标势 φ 和矢势 $\vec{A}$ 构成的势方程具有对称性。它的矢势 $\vec{A}$ 的纵向部

分和标势φ 的选择还可以有任意性，即存在多余的自由度。尽管如此，它在相对论中显示出协变性。因此，本书以后都采用洛仑兹规范。

§5.2　推迟势

Retarded　Potential

本节主要是求解达朗贝尔（ d’ Alembert ）方程，并阐明其解的物理意义。

1、达朗贝尔方程的解

不管是矢势 $\vec{A}$ 还是标势 φ，在**Lorentz**规范条件下都满足同样的达朗贝尔方程。而达朗贝尔方程式是线性的，它反映了电磁场的叠加性，故交变电磁场中的矢势 $\vec{A}$ 和标势 φ 均满足叠加原理。因此，对于场源分布在有限体积内的势，可先求出场源中某一体积元所激发的势，然后对场源区域积分，即得出总的势。又因矢势 $\vec{A}$ 的方程与标势 φ 的方程在形式上相同，故只需求出 φ 的方程的解即可。

根据标势φ 所满足的方程：

$$\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

设坐标原点处有一假想变化电荷***Q*(*t*)**，其电荷体密度为 $\boxed{\rho(\vec{x},t)=Q(t)\delta(\vec{x})}$ ，此时电荷辐射的势的达朗贝尔方程为

$$\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{1}{\varepsilon_0}Q(t)\delta(\vec{x})$$

除在原点以外的空间 $\rho=0$ ，因而得到

$$\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0$$

因为点电荷的场分布是球对称的，若以***r*** 表示源点到场点的距离，则 φ 不依赖于角变量，只依赖于***r*** 和***t***．也就是说， φ与θ 和$\boldsymbol{\varphi}$无关，仅是***r*** 和***t*** 的函数，即

$$\varphi=\varphi(r,t)$$

而且除原点外，φ 满足波动方程

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r})-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0 \qquad (r\neq 0)$$

上式的解是球面波，考虑到***r*** 增大时势φ 减弱，

所以作如下代换

$$\varphi(r,t)=\frac{1}{r}u(r,t)$$

将此代入上式即

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

这个方程式是一维空间的齐次波动方程，其通解为

$$u(r,t)=f(t-\frac{r}{c})+g(t+\frac{r}{c})$$

式中的 f 和 g 是两个任意函数，故有

$$\varphi(r,t)=\frac{1}{r}\left[f(t-\frac{r}{c})+g(t+\frac{r}{c})\right]$$

此解的第一项表示由场源向外辐射的球面波，第二项则表示向场源会聚的球面波。式中 f 和 g 是 $(t-\frac{r}{c})$和$(t+\frac{r}{c})$ 的任意函数。其具体形式由场源条件而定。当我们研究辐射时，电磁场是由原点处的电荷发出的，它必然是向外发射的波。因此在辐射问题中应取 $g=0$，而函数 f 的形式应由原点处的电荷变化形式决定。

为此，考察上述解过渡到恒定场的情况，即取 $g=0$，$c \to \infty$，则

$$\varphi(r,t) = \frac{1}{r} f(t)$$

将该式与恒定场中Q所激发的电势

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

比较，则得

$$f(t) = \frac{Q(t)}{4\pi\varepsilon_0}$$

因此在交变电磁场中应有相似的解，即

$$f(t-\frac{r}{c})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}Q(t-\frac{r}{c})$$

故交变场源 $Q(t-\frac{r}{c})$ 所激发的势为

$$\varphi(r,t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}Q(t-\frac{r}{c})$$

如果点电荷不在原点处，而是在$\vec{x}'$点上，令$\boldsymbol{r}$为$\vec{x}'$点到场点 $\vec{x}$ 的距离，有

$$\varphi(\vec{x},t)=\frac{Q(\vec{x}',t-\frac{r}{c})}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

如果场源电荷分布在有限体积 V内，对于一般变化电荷分布 $\rho(\vec{x}',t)$，它所激发的标势为：

$$\boxed{\varphi(\vec{x},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{x}',t-\frac{r}{c})}{r}d\tau'}$$

因矢势$\vec{A}$ 的微分方程与标势φ 的微分方程相似，故其解也相似，所以一般变化电流分布 $\vec{j}(\vec{x}',t)$

所激发的矢势为：

$$\boxed{\vec{A}(\vec{x},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}(\vec{x}',t-\frac{r}{c})}{r}d\tau'}$$

2、推迟势（Retarded Potential)

达朗贝尔方程的解为：

$$\varphi(\vec{x},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{x}',t-\frac{r}{c})}{r}d\tau'$$

$$\vec{A}(\vec{x},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}(\vec{x}',t-\frac{r}{c})}{r}d\tau'$$

它给出了分布在有限体积内的变化电荷与变化电流在空间任意点所激发的标势 φ 的矢势 $\vec{A}$ 。必须强调指出，该式中的 $\vec{x}$ 表示场点坐标， $\vec{x}'$ 表示源点坐标。

$\varphi(\vec{x},t)$ 和 $\vec{A}(\vec{x},t)$ 分别表示***t***时刻在 $\vec{x}$ 点处的标势 φ 和矢势 $\vec{A}$ 的值，$\rho(\vec{x}',t-\frac{r}{c})$ 和 $\vec{j}(\vec{x}',t-\frac{r}{c})$

分别表示 $t'=t-\frac{r}{c}$ 时刻在 $\vec{x}'$处的 ρ和$\vec{j}$ 的值。

值得注意的是：电荷密度 $\rho(\vec{x}',t-\frac{r}{c})$ 和电流密度 $\vec{j}(\vec{x}',t-\frac{r}{c})$ 中的时刻是 t' 而不是 $\boldsymbol{t}$。这说明：t' 时刻在 $\vec{x}'$ 处电荷或电流产生的场并不能在同一时刻 t' 就到达 $\vec{x}$ 点，而是要一个传输时间△$\boldsymbol{t}$，而且 $\Delta t=t-t'=\frac{r}{c}$ ，由于$\boldsymbol{t}>t'$，故$\boldsymbol{t}$ 时刻的势 φ 和 $\vec{A}$ 是晚于场源辐射的时刻 t'，因此将此时的 φ 和 $\vec{A}$ 称为推迟势。

综上所述，推迟势的重要性在于说明了电磁作用是以有限速度 $\upsilon = c$ 向外传播的，它不是瞬时超距作用。换句话说：电荷、电流辐射电磁波，而电磁波以速度

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

脱离电荷、电流向外传播。这就是推迟势所描写的物理过程。

3、推迟势满足Lorentz条件

利用电荷守恒定律，我们可以验证推迟势满足**Lorentz**规范条件。

推导

已知电磁场的势为

$$\varphi(\vec{x},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{x}',t')}{r}d\tau'$$

$$\vec{A}(\vec{x},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}(\vec{x}',t')}{r}d\tau'$$

式中 $t'=t-\dfrac{r}{c}$

$$r=\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right]^{1/2}$$

则有

$$\nabla\cdot\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\nabla\cdot\frac{\vec{j}(\vec{x}',t')}{r}d\tau'$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\left(\frac{1}{r}\nabla\cdot\vec{j}+\vec{j}\cdot\nabla\frac{1}{r}\right)d\tau'$$

其中

$$\nabla\cdot\vec{j}(\vec{x}',t')=\nabla\cdot\vec{j}(\vec{x}',t')\Big|_{t'=\text{常数}}+\nabla\cdot\vec{j}(\vec{x}',t')\Big|_{\vec{x}'=\text{常数}}$$

$$\|$$

$$0$$ 这是因为微分只对x进行的

则 $$\nabla\cdot\vec{j}(\vec{x}',t')=\nabla\cdot\vec{j}(\vec{x}',t')\Big|_{\vec{x}'=\text{常数}}$$

而

$$\nabla\cdot\vec{j}(\vec{x}',t')\Big|_{\vec{x}'=\text{常数}}=\frac{\partial j_x}{\partial x}+\frac{\partial j_y}{\partial y}+\frac{\partial j_z}{\partial z}$$

$$=\frac{\partial j_x}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x}+\frac{\partial j_y}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial y}+\frac{\partial j_z}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial z}$$

$$=-\frac{1}{c}\left(\frac{\partial j_x}{\partial t'}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial j_y}{\partial t'}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial j_z}{\partial t'}\frac{\partial r}{\partial z}\right)$$

$$=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{j}}{\partial t'}\cdot\nabla r$$

所以

$$\nabla\cdot\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\left(-\frac{1}{cr}\frac{\partial\vec{j}}{\partial t'}\cdot\nabla r+\vec{j}\cdot\nabla\frac{1}{r}\right)d\tau'$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\left(\frac{1}{cr}\frac{\partial\vec{j}}{\partial t'}\cdot\nabla' r-\vec{j}\cdot\nabla'\frac{1}{r}\right)d\tau'$$

这里对$\boldsymbol{r}$的函数而言，有$\nabla=-\nabla'$ 。

又因为

$$\nabla'\cdot\vec{j}(\vec{x}',t')=\nabla'\cdot\vec{j}\Big|_{t'=\text{常数}}+\nabla'\cdot\vec{j}(\vec{x}',t')\Big|_{\vec{x}'=\text{常数}}$$

$$=\nabla'\cdot\vec{j}\Big|_{t'=\text{常数}}+\frac{\partial j_{x'}}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x'}+\frac{\partial j_{y'}}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial y'}+\frac{\partial j_{z'}}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial z'}$$

$$=\nabla'\cdot\vec{j}\Big|_{t'=\text{常数}}-\frac{1}{c}\left(\frac{\partial j_{x'}}{\partial t'}\frac{\partial r}{\partial x'}+\frac{\partial j_{y'}}{\partial t'}\frac{\partial r}{\partial y'}+\frac{\partial j_{z'}}{\partial t'}\frac{\partial r}{\partial z'}\right)$$

$$=\nabla'\cdot\vec{j}\Big|_{t'=\text{常数}}-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{j}}{\partial t'}\cdot\nabla' r$$

即 $$\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{j}}{\partial t'}\cdot\nabla' r = \nabla'\cdot\vec{j}\Big|_{t'=常数} - \nabla'\cdot\vec{j}$$

于是

$$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\left[\frac{1}{r}\nabla'\cdot\vec{j}\Big|_{t'=常数} - \left(\frac{1}{r}\nabla'\cdot\vec{j} + \vec{j}\cdot\nabla'\frac{1}{r}\right)\right]d\tau'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\left[\frac{1}{r}\nabla'\cdot\vec{j}\Big|_{t'=常数} - \nabla'\cdot\frac{\vec{j}}{r}\right]d\tau'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{1}{r}\nabla'\cdot\vec{j}\Big|_{t'=常数}d\tau' - \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S\frac{\vec{j}}{r}\cdot d\vec{s}'$$

0

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{1}{r}\nabla'\cdot\vec{j}\Big|_{t'=常数}d\tau'$$

另外：

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{1}{r}\frac{\partial \rho}{\partial t}d\tau'$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{1}{r}\frac{\partial \rho}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}d\tau'$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{1}{r}\frac{\partial \rho}{\partial t'}d\tau'$$

由此得到：

$$\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{1}{r}\nabla'\cdot\vec{j}\Big|_{t'=\text{常}}d\tau'+\frac{1}{c^2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{1}{r}\frac{\partial\rho}{\partial t'}d\tau'$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{1}{r}\left(\nabla'\cdot\vec{j}\Big|_{t'=\text{常}}+\frac{\partial\rho}{\partial t'}\right)d\tau'=0$$

要使上式保持成立（恒等），只有

$$\nabla'\cdot\vec{j}\Big|_{t'=\text{常}}+\frac{\partial\rho}{\partial t'}=0$$

即得 $\vec{A}$ 和 φ 的解满足**Lorentz**条件。